MÉTHODES ET THÉORIES

POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES

DE

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC APPLICATION A PLUS DE 400 PROBLÈMES

PAR

JULIUS PETERSEN

PROFESSEUR A L'UNIVERSITE DE COPENHAGUE

TRADUIT PAR

O. CHEMIN

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES
PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CINQUIEME ÉDITION

Nouveau tirage

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

—

1946

PROBLÈMES

DE

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

11-XII-53

MÉTHODES ET THÉORIES

POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES

DE

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC APPLICATION A PLUS DE 400 PROBLÈMES

PAR

JULIUS PETERSEN

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COPENHAGUE

TRADUIT PAR

O. CHEMIN

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES
PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CINQUIEME ÉDITION

1953. Nouveau tirage

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

—

1946

AVERTISSEMENT DU TRADUCTEUR

pour la première édition.

On a publié en France un assez grand nombre de recueils de théorèmes et de problèmes de géométrie : quelques-uns sont accompagnés d'un résumé des solutions; mais on peut dire d'une manière générale que, dans aucun d'eux, on ne s'est attaché spécialement aux problèmes de construction proprement dits et à la méthode à suivre pour les résoudre.

Tout le monde sait pourtant quelles difficultés ils présentent souvent, alors même qu'ils paraissent le plus simples. Tous les professeurs ont vu l'embarras des élèves, leurs hésitations et leurs tâtonnements infructueux quand ils se trouvent aux prises avec une de ces questions dont la solution n'est pas une conséquence plus ou moins immédiate des théorèmes qu'on leur enseigne dans les cours.

Nous croyons qu'il faut en voir la cause dans l'absence complète de méthode qui préside aux recherches. Nous avons à coup sûr d'excellents ouvrages pour l'enseignement de la géométrie élémentaire; mais, jusqu'ici, on ne s'est pas préoccupé d'une manière spéciale de la résolution des problèmes et, il faut bien le dire, dans les quelques ouvrages publiés sur cette matière et qui sont dans les mains des élèves, on ne paraît pas s'être attaché à leur apprendre comment ils doivent procéder méthodiquement pour avoir chance de trouver les solutions qu'ils cherchent.

C'est cette lacune que M. Petersen s'est proposé de combler. Un simple examen de l'ouvrage actuel montrera sans peine qu'il ne s'agit pas ici d'un recueil comme tant d'autres et ne contenant que des problèmes plus ou moins nouveaux, plus ou moins intéressants.

AVERTISSEMENT DU TRADUCTEUR

pour la première édition.

On a publié en France un assez grand nombre de recueils de théorèmes et de problèmes de géométrie : quelques-uns sont accompagnés d'un résumé des solutions; mais on peut dire d'une manière générale que, dans aucun d'eux, on ne s'est attaché spécialement aux problèmes de construction proprement dits et à la méthode à suivre pour les résoudre.

Tout le monde sait pourtant quelles difficultés ils présentent souvent, alors même qu'ils paraissent le plus simples. Tous les professeurs ont vu l'embarras des élèves, leurs hésitations et leurs tâtonnements infructueux quand ils se trouvent aux prises avec une de ces questions dont la solution n'est pas une conséquence plus ou moins immédiate des théorèmes qu'on leur enseigne dans les cours.

Nous croyons qu'il faut en voir la cause dans l'absence complète de méthode qui préside aux recherches. Nous avons à coup sûr d'excellents ouvrages pour l'enseignement de la géométrie élémentaire; mais, jusqu'ici, on ne s'est pas préoccupé d'une manière spéciale de la résolution des problèmes et, il faut bien le dire, dans les quelques ouvrages publiés sur cette matière et qui sont dans les mains des élèves, on ne paraît pas s'être attaché à leur apprendre comment ils doivent procéder méthodiquement pour avoir chance de trouver les solutions qu'ils cherchent.

C'est cette lacune que M. Petersen s'est proposé de combler. Un simple examen de l'ouvrage actuel montrera sans peine qu'il ne s'agit pas ici d'un recueil comme tant d'autres et ne contenant que des problèmes plus ou moins nouveaux, plus ou moins intéressants.

PRÉFACE

de la première édition.

Plusieurs siècles avant l'ère chrétienne, la géométrie était déjà arrivée à un très haut degré de développement. L'Algèbre, qui lui a rendu plus tard de si grands services, avait progressé plus lentement; aussi les anciens en étaient-ils à peu près exclusivement réduits aux méthodes géométriques pour résoudre les problèmes de construction et la solution de ces questions jouait-elle un rôle important dans leurs ouvrages. Quoique les mathématiciens modernes n'aient pas cessé de s'intéresser à cette branche de la science, les moyens de traiter rationnellement cette classe de problèmes se sont développés d'une manière relativement moins rapide. Apollonius, par exemple, aurait aussi bien pu que Steiner résoudre le problème de Malfatti, s'il en avait eu connaissance. Cette situation a été cause que beaucoup de personnes ont considéré les problèmes de constructions géométriques comme des sortes d'énigmes dont la solution ne pourrait guère être tentée que par quelques esprits doués de facultés toutes spéciales. Il en est résulté que ces questions ont à peine pénétré dans les écoles où pourtant elles auraient tout naturellement dû être cultivées; car il n'existe pas de problèmes qui servent autant à aiguiser la faculté d'observation et de combinaison et à donner à l'esprit de la clarté et de la logique; il n'y en a pas qui présentent autant d'attrait pour les élèves.

L'ouvrage actuel a pour objet d'essayer d'apprendre à ces derniers comment on doit attaquer un problème de construction. Après avoir résolu un grand nombre de questions, les unes originales, les autres extraites des nombreuses collections existantes, j'ai essayé d'analyser l'enchaînement des idées qui conduisent à la solution de chacune d'elles et d'en faire une classification sous formes de règles générales. S'il se trouve que mes solutions diffèrent de celles des autres auteurs et si, dans certains cas, elles paraissent plus compliquées, c'est que j'ai préféré celles qui sont méthodiques à celles qui semblent dues à un hasard heureux. L'objet que j'ai principalement en vue, c'est la méthode; dans la plupart des cas, je n'ai fait qu'indiquer la clef de la solution et j'en ai laissé la discussion détaillée au lecteur ou au professeur.

Il y a très peu de figures dans le texte; on comprend bien mieux une figure et on se la rappelle bien plus facilement quand on l'a vue pendant la période de la construction. Mon idée, c'est de forcer les élèves à travailler le présent ouvrage et non pas simplement à le lire.

Les « Méthodes et Théories » ont été publiées pour la première fois en 1866 et en langue danoise. Ce livre a donc été soumis à une épreuve complète et j'ose dire qu'il l'a subie avec succès. Il y a bien des preuves de l'influence heureuse qu'il a exercée sur l'étude de la géométrie, non seulement en Danemark, mais aussi dans les autres états scandinaves. Le succès qu'il a eu ici justifie suffisamment, je pense, mon désir de le répandre au dehors dans un cercle plus étendu de lecteurs. J'espère qu'on le trouvera utile, non seulement pour aider à l'enseignement de la géométrie élémentaire, mais encore pour préparer à l'étude de la géométrie moderne.

Copenhague 1879.

JULIUS PETERSEN.

INTRODUCTION

Les propositions de géométrie se présentent sous deux formes distinctes. Ou bien elles expriment qu'une figure qui a été tracée d'une certaine manière, déterminée à l'avance, satisfait à certaines conditions. Ou bien elles demandent qu'on trace (qu'on construise) une figure de manière qu'elle remplisse certaines conditions données. Dans le premier cas, on a le *théorème*; dans le second, le *problème*.

Comme la solution des problèmes doit se traduire graphiquement par un dessin, il faut recourir à l'emploi de quelques instruments. Habituellement, on ne se sert que de la règle, à l'aide de laquelle on peut tracer une droite passant par deux points donnés, et du compas qui permet de décrire autour d'un centre donné un cercle de rayon donné. Une solution quelconque se composera donc pour nous de ces deux opérations (une ou plusieurs fois répétées).

Cette restriction a pour conséquence que beaucoup de problèmes, simples en apparence, ne pourront pas être résolus (trisection de l'angle, quadrature du cercle, etc.). En général, on peut démontrer qu'il en sera ainsi pour ceux où le calcul conduirait à des équations qui ne peuvent pas se ramener au premier ou au second degré.

Un problème est *surabondamment déterminé*, quand la figure cherchée est soumise à plus de conditions qu'il n'en faut pour la déterminer; il est *déterminé*, quand il ne comporte qu'un nombre fini de solutions; enfin il est *indéterminé*, quand il en admet un nombre infini.

Pour résoudre un problème déterminé, il faut :

Effectuer la construction

Démontrer qu'elle est exacte

La *discuter* c.-à-d. indiquer les limites entre lesquelles les données doivent être comprises pour que le problème admette 0, 1, 2, &c. solutions.

Parmi les problèmes indéterminés, ceux qui deviendraient déterminés par l'adjonction d'*une seule* condition en plus, présentent un intérêt tout particulier. Quoiqu'un pareil problème ait une infinité de solutions, il n'y sera pas satisfait par une figure quelconque; mais toutes ses solutions se grouperont d'une certaine manière, déterminée par les conditions données. Ainsi un point est déterminé quand il doit satisfaire à deux conditions données; si on ne lui en impose qu'une seule, il devient indéterminé; mais tous les points qui remplissent cette dernière condition se trouveront sur une ligne droite ou courbe; on lui a donné le nom de *lieu géométrique* des points qui satisfont à cette condition. Il en est de même d'une figure pour la détermination de laquelle il manque une condition; car en général, chaque point de la figure se trouvera dans le même cas, en sorte que chacun d'eux aura son lieu géométrique.

La Géométrie Analytique fournit une méthode complètement générale pour la résolution des problèmes de géométrie. Mais par cela même qu'on applique une seule et même méthode aux problèmes les plus différents, il s'en suit naturellement qu'on doit très-fréquemment faire de grands détours. Ainsi, dans la Géométrie Analytique, on considère les distances des points à un couple d'axes qui en général n'ont absolument rien à faire dans la question. En outre, en appliquant cette méthode, on parvient aisément à faire mécaniquement les calculs, sans que cependant on puisse toujours interpréter géométriquement les équations qu'on obtient. Enfin, et c'est peut-être la raison la plus sérieuse, ces dernières arrivent facilement à un degré de complication tel qu'il n'est plus possible de les résoudre en pratique.

En raison de ces difficultés qu'on rencontre dans l'application directe de la Géométrie de Descartes, on a imaginé dans ces derniers temps une grande quantité de méthodes particulières (fondées sur l'emploi de différents systèmes de coordonnées, &c.) qui permettent de résoudre individuellement les problèmes d'une manière plus naturelle et plus élégante; mais la difficulté s'est reportée maintenant sur le choix de la méthode. On a toutefois créé ainsi une transition entre les procédés algébriques et ceux purement géométriques. Dans ces derniers, on tâche de trouver la solution du problème, en étudiant par la voie géométrique quelles sont les liaisons qui existent entre les éléments donnés de la figure et ceux qu'on cherche. Pour faciliter ces investigations, on commence dans tous les cas par *dessiner une figure* qui représente la solution cherchée et il ne s'agit plus alors que de l'étudier à l'aide des théorèmes connus de la Géométrie.

S'aperçoit-on, comme c'est le cas dans un grand nombre des problèmes les plus simples, que tout se ramène à la détermination d'un point inconnu ? La méthode qu'on doit appliquer découle immédiatement de ce qui précède.

On considère, en les prenant isolément, les deux conditions auxquelles le point cherché doit satisfaire; à chacune d'elles correspondra un lieu géométrique; et si ce sont des droites ou des cercles, le problème est résolu. Car le point, devant se trouver en même temps sur chacun des deux lieux, doit se trouver aux points où ils se coupent.

Si les lieux géométriques sont deux droites, le problème n'admet qu'une solution et ne peut devenir impossible que si les lignes sont parallèles. Si ce sont deux cercles, ou un cercle et une droite, le problème admet deux solutions quand ils se coupent, une quand ils sont tangents; il devient impossible quand ils sont extérieurs l'un à l'autre. Il y a une différence qualitative entre ce cas et le précédent, où l'impossibilité n'était qu'une question de limite.

Quand les lieux géométriques sont d'autres courbes, on ne peut plus les employer directement pour les constructions et il faut reprendre la question d'une autre manière. Il faut toutefois remarquer qu'un point qui est donné par l'intersection d'une droite et d'une conique peut être déterminé au moyen d'une droite et d'un cercle, tandis que la construction ne peut plus s'effectuer si le point est déterminé par l'intersection de deux coniques indépendantes l'une de l'autre.

La méthode qu'on vient d'indiquer pour les problèmes les plus simples, peut s'étendre aux plus compliqués. La règle serait la suivante :

On considérera l'une des conditions imposées à la figure comme n'existant pas, et l'on cherchera les lieux géométriques des points de la figure ainsi rendue indéterminée.

On conçoit aisément qu'il est de la plus grande importance de connaître beaucoup de lieux géométriques, en tant que ce seront des droites ou des cercles. Dans le premier chapitre, nous donnerons les plus importants d'entre eux, avec un développement détaillé des principales règles énoncées ci-dessus.

Quand on ne pourra pas appliquer immédiatement les lieux géométriques, la règle à suivre sera celle-ci : De la figure tracée on en déduira une autre dans laquelle la liaison entre les éléments donnés et ceux qu'on cherche ressortira plus commodément. Nous traiterons ce sujet en détail dans le second chapitre.

Dans ce qui suit, pour abréger, nous désignerons un triangle par ABC et les longueurs de ses côtés par a, b, c. La hauteur correspondant à a s'appellera h_a; la médiane au même côté (transversale passant par le centre de gravité) sera m_a. La longueur de la bissectrice de $< A$ sera w_a. r et ρ sont les rayons des cercles circonscrits et inscrits, tandis que ρ_a, ρ_b, ρ_c sont ceux des cercles exinscrits (le cercle de rayon ρ_a est tangent à a et aux prolongements de b et c). Quand on parlera d'un quadrilatère $ABCD$, il faudra se représenter les sommets dans l'ordre où on les énonce.

$< (a, b)$ représente l'angle compris entre deux lignes a et b.

PREMIER CHAPITRE

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

A. Lieux géométriques de points.

a. Le lieu géométrique de tous les points qui sont à une distance donnée d'un point donné est un cercle qui a le point donné pour centre et la distance donnée pour rayon.

Coroll. 1. Le lieu géométrique des extrémités des tangentes d'égale longueur d'un même cercle est un cercle concentrique au premier.

Coroll. 2. Le lieu géométrique des points qui jouissent de la propriété que les couples de tangentes menées de ces points à un même cercle comprennent le même angle, est un cercle concentrique au précédent.

Coroll. 3. Le lieu géométrique des centres de tous les cercles de rayon donné, tangents à un cercle donné, se compose de deux cercles concentriques au cercle donné et dont les rayons sont respectivement la somme et la différence des rayons donnés.

b. Le lieu géométrique de tous les points qui sont à une distance donnée d'une droite donnée se compose de deux droites, parallèles à la droite donnée et situées à la distance donnée de celle-ci.

Coroll. 1. Le lieu géométrique des sommets de tous les triangles équivalents de même base est une droite parallèle à cette base; car les triangles ont tous la même hauteur.

c. Le lieu géométrique de tous les points également distants de deux points donnés est une droite, perpendiculaire à celle qui joint les deux points et passant par son point milieu.

d. Le lieu géométrique de tous les points à égale distance de deux droites données se compose de deux droites perpendiculaires entre elles et qui bissectent les angles compris entre les deux droites données.

e. Le lieu géométrique de tous les points tels que les droites qui les joignent aux extrémités d'un segment donné comprennent un angle donné, est un arc de cercle qui a pour corde le segment donné. On dit de l'arc de cercle qu'il est *capable* de l'angle donné, et du segment qu'on le *voit* de tous les points de l'arc de cercle sous l'angle donné.

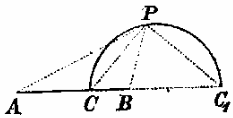
Si un point de l'arc a la propriété en question, il doit en être de même pour tous les autres, puisque tous les angles sont des angles inscrits dans le même arc. Si l'on mène une droite qui soit tangente au cercle à l'une des extrémités du segment (ou de la corde), elle fera avec cette corde un angle égal à l'angle donné, puisque tous deux sont mesurés par le même arc. On déduit de là la construction suivante : Par une des extrémités du segment, on mène une droite faisant avec lui l'angle donné; on a ainsi une tangente; une perpendiculaire à cette dernière, menée par le point de contact, passera par le centre, qui se trouvera également sur une perpendiculaire au segment, élevée par son milieu.

L'arc est une demi-circonférence, quand l'angle donné est droit.

Remarque. Quand on ne sait pas de quel côté de la ligne donnée doit se trouver le point cherché, il faut construire deux arcs capables de l'angle donné, un de chaque côté de la ligne. Les deux autres arcs, qui complètent les deux cercles, correspondent au supplément de l'angle donné. S'il ne s'agit pas de l'angle compris entre deux lignes, mais de celui qui s'étend d'une ligne à une autre ligne et si l'on donne un signe à ce dernier angle, en regardant comme positive l'une des deux directions de rotations, le lieu géométrique sera un cercle complet. Étant donné les points A et B, l'angle depuis la ligne passant par A jusqu'à la ligne passant par B est égal à l'angle depuis la tangente en A jusqu'à AB.

Coroll. 1. Le lieu géométrique des points milieux de toutes les cordes menées par un point donné est un cercle; car les lignes, qui joignent les milieux des cordes avec le centre du cercle et avec le point donné, forment un angle droit.

Coroll. 2. Dans un cercle, on inscrit des triangles ABC, ayant un côté commun AB, et dans ces triangles on inscrit des cercles; le lieu géométrique des centres de ces derniers est un arc de cercle qui a AB pour corde et qui est décrit du milieu de l'arc AB comme centre. Le reste de ce cercle est le lieu géométrique des centres des cercles ex-inscrits. En effet, de chacun des centres en question on verra AB sous des angles qui seront égaux respectivement à $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}C$ et $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}C$; et AB sera vu du milieu de l'arc AB sous un angle égal à $\pi - C$.



f. Le lieu géométrique de tous les points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné $m:n$ est une circonférence de cercle.

Soient A, B les points donnés, P un des points cherchés, PC et PC_1 les bissectrices intérieures et extérieures de $< APB$. Nous avons alors :

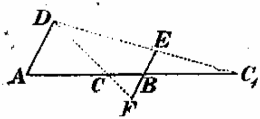
$$\frac{AC}{CB}=\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{m}{n}; \quad < CPC_1=\frac{\pi}{2}.$$

Les points C et C_1 divisent donc la ligne AB intérieurement et extérieurement suivant le rapport donné et ne changent pas, quel que soit P. Comme le segment CC_1 est vu du point P sous un angle droit, le lieu géométrique de P sera, (d'après **e**), un cercle ayant CC_1 pour diamètre.

On dit que les points C et C_1 divisent harmoniquement

AB suivant le rapport $m:n$, et le problème se ramène alors à celui-ci :

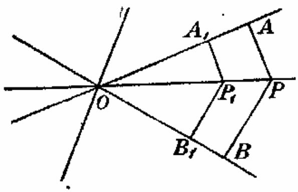
Diviser harmoniquement une ligne donnée et suivant un rapport donné.



Cette Construction est effectuée dans la figure ci-contre. AD et BE sont entre eux dans le rapport donné et sont menés parallèlement. BF est égal à BE. DF et DE coupent alors AB suivant les points cherchés.

e' est un cas particulier de **f**, où $m = n$.

g. Le lieu géométrique de tous les points, dont les distances à deux droites données sont entre elles dans un rapport donné $m:n$ se compose de deux droites, qui passent par le point d'intersection des droites données.



Soient OA et OB les lignes données. Si un point P a la propriété requise, il doit en être de même pour tous les points de OP; Soit P_1 l'un d'eux, nous avons :

$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{A_1P_1}{AP} = \frac{B_1P_1}{BP}$$

ou bien

$$\frac{A_1P_1}{B_1P_1} = \frac{AP}{BP}.$$

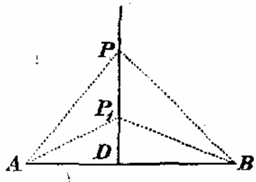
On peut donc mener cette ligne dès qu'on en connaît un point; et ce dernier peut se déterminer facilement à l'aide de **b**, en prenant arbitrairement les deux distances dans le rapport donné. L'autre ligne se tracera de la même manière; elle se trouve dans le supplément de AOB. Ces quatre lignes menées par O forment un *faisceau harmonique*. Une droite quelconque sera en effet coupée par elles en quatre points harmoniques.

d est un cas particulier de **g**, où $m = n$.

Coroll. Soient données deux droites AB et CD, et soit proposé de chercher un point P tel que ΔPAB et ΔPCD

soient dans un rapport donné; le lieu géométrique de P est le même que le précédent; car le rapport des hauteurs est constant.

h. Le lieu géométrique de tous les points, dont les carrés des distances à deux points donnés ont une différence constante a^2, est une droite perpendiculaire à la droite qui joint les deux points.



Soient A et B les points donnés, P un des points cherchés, PD une perpendiculaire à AB. Tout point de PD aura alors la propriété requise; car prenons P_1 par exemple, nous avons :

$$\overline{AP}_1^2 = \overline{AD}^2 + \overline{P_1D}^2\,; \quad \overline{BP}_1^2 = \overline{BD}^2 + \overline{P_1D}^2\,;$$

d'où
$$\overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2\,;$$

de même
$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2.$$

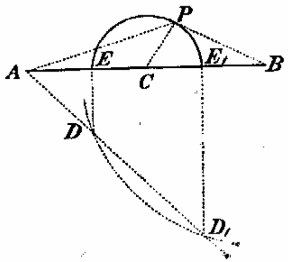
Construisons un triangle rectangle dont un des côtés soit a, et décrivons autour de A et B comme centre des cercles dont les rayons soient respectivement égaux à l'hypoténuse et à l'autre côté de ce triangle, la ligne cherchée passera par les points d'intersection de ces deux cercles. Ici on a supposé P plus éloigné de B que de A.

Coroll. I. Le lieu géométrique de tous les points d'où l'on peut mener des tangentes égales à deux cercles (ou qui ont même puissance par rapport aux deux cercles) est une droite perpendiculaire à la ligne des centres (axe radical, axe d'égale puissance des cercles); on voit aisément en effet que les distances des points aux centres des cercles doivent être telles que la différence de leurs carrés soit égale à la différence des carrés des rayons. Quand les cercles se coupent, l'axe radical passe par leurs points d'intersection. Les trois lignes d'égale puissance (axes radicaux) de trois cercles passent par le même point, le point d'égale puissance (centre radical). On détermine aisément par là un point de la ligne d'égale puissance de deux cercles qui ne se coupent pas; il suffit de décrire un cercle quelconque qui coupe les deux premiers.

Coroll. 2. Le lieu géométrique des centres des cercles qui coupent deux cercles donnés, chacun suivant un diamètre est une droite perpendiculaire à la ligne des centres et à la même distance de l'un d'eux que l'axe radical est de l'autre.

Coroll. 3. Le lieu géométrique des centres de tous les cercles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés (c.-à.-d. tels que les deux tangentes menées aux cercles en leur point d'intersection soient rectangulaires) est la ligne d'égale puissance des cercles.

i. Le lieu géométrique de tous les points dont les carrés des distances à deux points donnés ont une somme constante a^2, est un cercle qui a son centre au milieu de la ligne qui joint les deux points.



Soient A et B les points donnés, P un des points cherchés. Menons la médiane PC, nous avons, comme on le sait,

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{PC}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2$$

ou $$\overline{PC}^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2$$

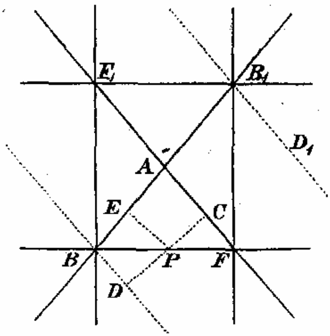
Les points cherchés sont donc à distance constante de C. Pour déterminer sur AB les points par lesquels passe le cercle, faisons en A, $< BAD = 45^{\circ}$. De B, avec un rayon a, décrivons un arc de cercle qui coupe AD aux points D et D_1. De D et D_1 abaissons sur AB des perpendiculaires; leurs pieds E et E_1 sont les points cherchés; car

$$a^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EB}^2 \quad \text{et} \quad a^2 = \overline{D_1E_1}^2 + \overline{E_1B}^2$$

mais $$DE = AE \quad \text{et} \quad D_1E_1 = AE_1$$

k. Le lieu géométrique de tous les points dont les distances à deux droites données ont une somme ou une différence donnée, est un système de quatre droites.

Soient AB et AC les droites données, P un des points cherchés, par suite $PC + PE = a$. Faisons $PD = PE$; le lieu géométrique de D se composera de deux droites, parallèles à AC et à la distance a de celle-ci. Soient BD et D_1B_1 ces droites. Les points cherchés doivent maintenant être à égale distance de AE et d'une de ces droites; ils seront donc sur une des quatre droites qui bissectent les angles aux points d'intersection B et B_1. Le problème est aussi résolu par là même, quand la différence des distances doit être a. Car un examen attentif de la figure montre aisément que les quatre segments limités BF, FB_1, B_1F_1 et F_1B correspondent au cas où la somme des distances est a, tandis que les portions illimitées restantes se rapportent à la différence.



Remarque. Si l'on convient de regarder CP comme positif ou négatif, suivant que P sera d'un côté ou de l'autre de la droite donnée AF; et de même, de compter EP positivement ou négativement, suivant que P sera d'un côté ou de l'autre de AB, on aura pour lieu géométrique une droite illimitée; car on a respectivement pour les quatre lignes :

$$CP + EP = a; \qquad CP - EP = a;$$
$$-CP + EP = a; \qquad -CP - EP = a.$$

A l'aide de ces lieux géométriques, on peut résoudre les problèmes qui suivent; on considère individuellement chacune des deux conditions imposées au point cherché; on obtient ainsi deux lieux géométriques pour le point.

Exemples.

1. Déterminer un point qui soit à égale distance de trois points donnés (**c**).
2. Déterminer un point à égale distance de trois droites données (**d**).
3. Construire un triangle, connaissant ses trois côtés (**a**).

Construire un cercle de rayon donné,

4. qui passe par deux points donnés (**a**)
5. qui passe par un point donné et soit tangent à une droite donnée (**a** et **b**)
6. qui passe par un point donné et soit tangent à un cercle donné (**a**)
7. qui soit tangent à deux droites données (**b**)
8. qui soit tangent à une droite donnée et à un cercle donné (**a** et **b**)
9. qui soit tangent à deux cercles donnés (**a**).
10. Construire un triangle, connaissant a, h_a et m_a (**a** et **b**).
11. Mener à un cercle donné une tangente sur laquelle une droite donnée détermine un segment donné (**a**, coroll. 1).
12. Construire un cercle qui passe par un point donné et qui soit tangent à une droite donnée ou à un cercle donné en un point donné (**c**).
13. Déterminer sur une circonférence de cercle un point qui soit à une distance donnée d'une droite donnée (**b**).
14. Sur une droite donnée déterminer un point qui soit à égale distance de deux points donnés (**c**).
15. Construire un cercle tangent à deux droites parallèles et passant par un point donné (**d** et **a**).
16. D'un point donné, mener une tangente à un cercle (**e**).

Construire un triangle, connaissant

17. A, a et h_a (**e** et **b**),
18. A, a et m_a (**e** et **a**).
19. Déterminer un point d'où l'on voie deux segments donnés sous des angles donnés (Problème de Pothenot) (**e**).
20. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant un angle, un côté adjacent et les deux diagonales (**e** et **a**).

21. Construire un point dont les distances à trois droites données soient entre elles dans des rapports donnés (**g**).

22. Dans un triangle, déterminer un point dont les distances aux trois sommets soient entre elles dans des rapports donnés (**f**).

23. Par un point donné, mener une droite qui rencontre un cercle donné de telle manière que les distances des points d'intersection à une droite donnée aient une somme donnée.

On détermine le point milieu de la corde (**e**, coroll. 1 et **b**).

24. Déterminer un point de telle manière que les tangentes menées de ce point à deux cercles donnés aient des longueurs données (**a**, coroll. 1).

25. Déterminer un point d'où l'on voie deux cercles donnés sous des angles donnés (**a**, coroll. 2).

26. Dans un triangle donné, inscrire un triangle isocèle de hauteur donnée, de manière que sa base soit parallèle à un des côtés (**b** et **c**).

27. Décrire un cercle, dont le centre soit sur une droite donnée et dont la périphérie soit à des distances données de deux droites données (**k**).

28. Construire un triangle, connaissant A, w_a et ρ (**d**, **b** et 16).

29. Construire un quadrilatère inscriptible $ABCD$, connaissant AB, BC, AC et l'angle des diagonales (3 et 1).

30. Construire un point tel que les tangentes menées de ce point à trois cercles donnés aient des longueurs égales (**h**, coroll. 1).

31. Construire un triangle, connaissant A, a et $b^2 + c^2$ (**e** et **i**).

32. Dans un triangle donné, trouver un point tel que les droites, qui le joignent aux sommets, partagent le triangle donné en trois triangles équivalents.

Soient ABC le triangle, O le point cherché. Si $\triangle AOB$ et $\triangle AOC$ sont équivalents, le lieu géométrique de O doit être une droite passant par A. Comme la médiane divise le triangle en deux parties équivalentes, le milieu de BC doit être un point du lieu; ce dernier est donc la médiane elle-même. Le point cherché est par suite le point d'intersection des médianes.

33. Dans un triangle donné, inscrire un triangle dont deux côtés soient donnés, et de telle manière qu'un de ses sommets tombe en un point donné (**a**).

34. Construire un cercle qui soit tangent intérieurement à trois cercles égaux donnés (**i**).

35. Construire un triangle, connaissant a, h_b, h_c (**e** et **a**).

36. Déterminer un point dont la distance au sommet d'un angle donné soit donnée et dont les distances aux côtés de l'angle soient entre elles dans un rapport donné (**a** et **g**).

Construire un triangle, connaissant

37. a, A et $b^2 - c^2$ (**e** et **h**).

38. a, h_a et $b^2 + c^2$ (**b** et **i**).

39. Construire un triangle rectangle, connaissant la hauteur correspondant à l'hypoténuse, deux points de l'hypoténuse et point de chacun des côtés (**b** et **e**).

40. Circonscrire un carré à un triangle équilatéral, de manière que les deux figures aient un sommet commun.

On cherche à déterminer le sommet opposé du carré (**e** et **c**).

41. Construire un triangle, connaissant a, A et ρ (**e**, coroll. 2).

42. Couper une droite donnée en deux segments qui aient pour moyenne proportionnelle un segment donné (**e** et **b**).

43. Étant donné un triangle rectangle, construire un cercle tangent à l'hypoténuse, qui passe par le sommet de l'angle droit et ait son centre sur un des côtés (**d**).

44. On donne deux parallèles, un point A sur l'une d'elles, et un autre point O situé d'une manière quelconque en dehors. Mener par O une droite qui coupe en X la parallèle passant par A, en Y l'autre parallèle, de manière que $AX = AY$.

On cherche à déterminer le milieu de XY.

45. Déterminer un point d'où l'on voie sous des angles égaux les trois segments AB, BC, CD d'une même droite donnée (**f**).

46. Dans un triangle, déterminer un point d'où les trois côtés paraissent de même grandeur (soient vus sous le même angle) (**e**).

47. Déterminer un point d'où trois cercles donnés paraissent de même grandeur.

Les distances du point aux centres des cercles doivent être entre elles dans le rapport des rayons; on trouve alors le point au moyen de **f**.

48. Construire un triangle, connaissant a, h_a et $b : c$ (**b** et **f**).

49. Dans un quadrilatère donné trouver un point dont les distances à deux des côtés opposés aient une somme donnée et les distances aux deux autres un rapport donné.

50. Sur une circonférence donnée, trouver un point dont la somme des distances à deux droites données soit un minimum (**k**).

51. Construire un cercle qui coupe orthogonalement trois cercles donnés (**h**, coroll. 3).

52. Construire un cercle, qui coupe trois cercles donnés suivant des diamètres (**h**, coroll. 2).

53. Dans un cercle donné, inscrire un triangle rectangle dont les côtés passent chacun par un point donné (**e**).

54. Dans un cercle donné, inscrire un triangle rectangle, connaissant un angle aigu et un point d'un des côtés (**e**).

55. Sur un billard circulaire sont placées deux billes sur le même diamètre; comment doit-on lancer l'une pour que, après réflexion, elle vienne rencontrer l'autre (**f**).

Dans les problèmes qui précèdent, on pouvait immédiatement appliquer les lieux géométriques, parce que tout se ramenait de suite à la détermination d'un point; ou bien parce qu'on voyait aisément que le problème était résolu quand on avait déterminé un pareil point. Quand il n'en est plus ainsi, on fait usage des règles suivantes :

On introduit dans la figure les éléments donnés; si, par exemple, la somme de deux lignes est donnée, il ne suffit pas que ces lignes y figurent isolément, il faut aussi introduire la somme donnée elle-même; en thèse générale, on le fait en s'arrangeant de telle manière qu'une extrémité tombe en un point donné.

On soumet la figure à un examen attentif, pour trouver les lignes et angles qui, sans être donnés, peuvent se déterminer facilement au moyen des éléments donnés.

On cherche ensuite à découvrir une portion de la figure, qui soit d'elle-même déterminée par les éléments donnés et qui puisse ainsi, quand on l'a tracée, servir à déterminer les autres parties de la figure. On peut avoir ici le choix entre plusieurs parties; en règle générale, il faudra prendre celle qui permettra d'obtenir immédiatement la plus grande portion de la figure cherchée. En particulier on employera souvent le principe, qui consiste à *rechercher des triangles* dont trois éléments sont connus.

Pour introduire les côtés d'un triangle, ou leurs sommes et leurs différences, on se sert souvent des quatre cercles inscrits au triangle. Sur chaque côté se trouvent deux sommets et quatre points de contact, et la distance entre deux quelconques d'entre eux peut s'exprimer simplement au moyen des côtés du triangle. Si l'on désigne par s la moitié du périmètre du triangle, on a en particulier les résultats suivants :

a) Le cercle inscrit détermine sur les côtés les segments $s - a$, $s - b$, $s - c$.

b) La distance de A aux points où le cercle de rayon ρ_a est tangent aux côtés b et c, est s. La distance de ces points de contact à celui du cercle inscrit est a.

c) Le cercle inscrit et l'un des cercles ex-inscrits sont tangents à a en des points qui sont également éloignés de B et C et dont la distance de l'un à l'autre est $b - c$ ou $c - b$.

Exemples.

56. Construire un quadrilatère, connaissant AB, BC, AC, BD et $\angle D$.

Le $\triangle ABC$ peut être construit immédiatement; on détermine ensuite D (**a** et **e**).

57. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant $\angle A$, $\angle ABD$, AC et BD.

On construit $\triangle ABD$; par là, le cercle circonscrit se trouve déterminé et on obtient C au moyen de **a**.

58. Construire un parallélogramme, connaissant AB, AC et AD.

59. Construire un triangle, connaissant A, h_a et w_a.

On peut construire immédiatement le triangle qui a pour côtés h_a et w_a.

60. Construire un triangle, connaissant h_a, m_a et r.

On trace le triangle qui a pour côtés h_a et m_a, et on détermine ensuite le centre du cercle circonscrit au moyen de **a** et **c**.

61. Construire un triangle, connaissant a, r et h_b.

On construit le triangle qui a pour côtés a et h_b et on détermine ensuite le centre du cercle circonscrit au moyen de **a**.

62. Construire un triangle, connaissant B, a et ρ.

63. Construire un triangle, connaissant a, $b + c$ et h_b.

64. Construire un parallélogramme, au moyen d'un côté et des deux diagonales.

65. Construire un triangle, connaissant h_a et m_a et sachant aussi que $a = 2b$.

66. Construire un quadrilatère, connaissant AC, $\angle CAB$, $\angle ACD$, CD et DB.

On trace le $\triangle ADC$ et on détermine ensuite B.

67. Par un point donné, mener une droite qui coupe les deux côtés d'un triangle de telle manière que les points d'intersection et les extrémités du troisième côté soient sur une même circonférence de cercle.

Construire un triangle, connaissant :

68. a, h_b et m_a.
69. h_a, m_a et b.
70. h_a, h_b et B.
71. h_a, m_a et $a : b$.
72. h_a, B et C.
73. Construire un triangle, connaissant a, A, $b + c$.

On introduit $b + c$ dans la figure, en prolongeant AC au delà de A et d'une quantité $AD = c$, et joignant ensuite D avec B. Comme on le voit facilement, le $\triangle CDB$ peut maintenant se construire immédiatement, puisque $\angle D = \frac{1}{2} A$. On détermine alors le sommet A au moyen de **c**.

On voit en même temps que, si BC est une corde donnée et si l'on prolonge une corde BA jusqu'à D d'une longueur $AD = DC$, le lieu géométrique de D est un cercle, dont le centre se trouve sur le milieu de l'arc BC.

74. Construire un triangle, connaissant A, b et $a - c$.

On prolonge c au delà de A de la longueur $a - c$.

75. Diviser un arc donné en deux arcs tels que la somme des cordes correspondantes soit un maximum.
76. Construire un triangle, connaissant A, $b + c$ et $h_b + DC$, D représentant le pied de h_b.
77. Construire un triangle, connaissant a, $b + c$ et $B - C$.
78. Construire un triangle, connaissant a, A et $b - c$.
79. Circonscrire un carré donné à un autre carré donné (73).
80. Circonscrire un n-gone régulier donné à un autre n-gone régulier donné.
81. Construire un quadrilatère, connaissant AB, BC, BD, $\angle A$ et $\angle B$.
82. Construire un quadrilatère, connaissant AB, AC, $\angle A$, $\angle D$ et $\angle C$.
83. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant r, AC, BD et $AB \pm BC$.

On trace le cercle, on y porte AC et on détermine B (73); on trouve ensuite D.

84. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant AB, BC, AC et $CD \pm DA$.

85. Construire un quadrilatère, connaissant AB, CD, AC $\angle BAC$ et $\angle ABD$.

86. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant $AB \pm BC$, DA, BD et $\angle A$.

87. Construire un triangle, connaissant a, $b - c$, $B - C$.

Menons BD, de manière que $AD = AB$ et aussi que $DC = b - c$; on voit alors aisément que $\angle DBC = \frac{1}{2}(B - C)$. On peut donc construire immédiatement le $\triangle BCD$ et on détermine A au moyen de **c**.

88. Construire un triangle, connaissant c, w_a et $B - C$.

Le triangle, qui a pour côtés c et w_a, peut se construire immédiatement, puisque $\angle(w_a, a) = 90^o - \frac{1}{2}(B - C)$.

89. Construire un trapèze, connaissant les diagonales, un des côtés parallèles et un angle.

90. On donne une droite, un point A sur cette droite et un point P en dehors. Déterminer sur la droite donnée un point X, tel que $AX + XP = m$, où m est donné (AX doit être affecté d'un signe).

Sur la droite donnée, à partir du point A, on porte la longueur m; X se détermine alors au moyen de **c**.

91. On donne deux points A et B et une droite passant par B. Sur cette dernière, déterminer deux points X et Y à égale distance de B et de manière que XY soit vu de A sous un angle donné.

On prolonge AB jusqu'en C, de manière que $BC = AB$.

92. On donne deux parallèles, sur l'une un point A, sur l'autre un point B et entre elles un point O. Mener par O une droite qui rencontre les parallèles en X et Y de telle manière que AX et BY (pris chacun avec un signe) aient une somme donnée.

La droite passe par le milieu de AC, si $YC = AX$.

93. Construire un triangle, connaissant a, A et $CD.b$, où D est le pied de h_b.

On peut facilement déterminer le pied de h_a.

94. Construire un triangle, connaissant B, $c - a$ et la différence des deux segments suivant lesquels b est divisé par h_b.

Portons les différences données, soit AD et AE, respectivement sur AB et AC, alors $\angle AED$ est connu ($BE = BD = BC$).

95. On donne trois points A, B, C et une droite passant par A. Décrire un cercle qui passe par A et B et coupe la droite donnée en un point D, tel que DC soit une tangente du cercle.

$\angle BDC = \angle BAD$, ce qui permet de trouver facilement D.

96. Construire un triangle, connaissant r, h_a et $B - C$. L'angle compris entre h_a et le rayon, dirigé suivant A, est connu.

97. Dans le $\triangle ABC$ mener XY parallèle à BC, de manière que $XY = XB + YC$.

La ligne cherchée passe par le centre du cercle inscrit.

98. Construire un triangle, connaissant $B - C$, w_a et la valeur du rapport $\frac{b+c}{a}$.

99. Dans un parallélogramme, merner une ligne AX vers un point X de CD, de manière que $AX = AB + XD$.

En retranchant AB de AX sur cette ligne, l'extrémité tombe sur BD.

100. Dans un triangle ABC, on donne AB en grandeur et en position; en outre l'angle A et le point D où le diamètre du cercle circonscrit mené par C coupe AB; on demande de construire le cercle circonscrit au triangle.

BD sera vu du centre du cercle sous un angle connu.

101. Dans un triangle où AD bissecte l'angle A, on connaît AD, $AB - BD$ et $AC - CD$. Construire le triangle.

Portons CA et BA sur BC de manière que DA_1 et DA_2 soient les différences données. Le cercle qui passe par A, A_1, A_2 est concentrique au cercle inscrit dans le triangle cherché et a un diamètre connu.

102. Construire un quadrilatère, connaissant les projections

(P, Q, T, S) du point de rencontre des diagonales sur les quatre côtés.

L'angle des perpendiculaires élevées sur deux côtés opposés est connu $((180^\circ \pm \frac{1}{2}(P-T))$.

103. On donne les points A et B sur un des côtés d'un angle droit; chercher sur l'autre côté un point X tel que $\angle AXB = 2 \angle ABX$.

On détermine le milieu de XY, Y étant un point de BX et $AX = AY$.

104. Par un point donné, mener une droite qui détermine dans un angle donné un triangle de périmètre donné.

On peut construire un des cercles ex-inscrits du triangle.

105. Construire un triangle, connaissant A, w_a et $a+b+c$.

106. Construire un triangle, connaissant A, ρ et $a+b+c$.

107. Construire un triangle, connaissant A, r et $a+b+c$.

Comme a est connu, le problème se ramène à 73 ou 137.

108. Construire un triangle, connaissant ρ, ρ_a et w_a.

h_a est déterminé au moyen de ρ et ρ_a.

109. Construire un triangle, connaissant ρ, ρ_a et $b-c$.

$b-c$ est la distance entre deux points de contact.

110. Construire un triangle, connaissant a, ρ et $b+c$.

s et a sont connus et déterminent deux points de contact et un sommet.

111. Construire un triangle, connaissant a, ρ et $b-c$.

112. Construire un triangle, connaissant h_a, ρ et $a+b+c$.

On connaît a.

113. Construire un triangle, connaissant a, ρ_b et ρ_c.

Le segment compris entre les points de contact des deux cercles est connu.

114. Construire un triangle, connaissant ρ_a, ρ_b et $a+b$.

Le segment compris entre les points de contact des deux cercles est connu.

115. Construire un triangle, connaissant ρ_b, ρ_c et $B-C$.

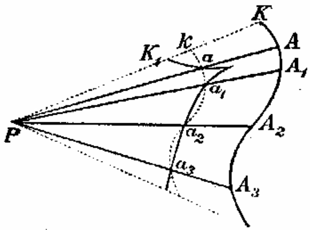
L'angle compris entre BC et la ligne des centres des deux cercles est connu.

116. Construire un triangle, connaissant a, $b+c$ et w_a.

Comme les centres des cercles inscrits et ex-inscrits et les points d'intersection de leurs tangentes communes sont des points harmoniques, leurs projections sur AB doivent être aussi des points harmoniques de ces quatre points, on en connaît trois; par suite on détermine aisément le quatrième.

Le problème peut se résoudre plus facilement, en traçant w_a et déterminant B et C au moyen de cette propriété, que leurs distances aux extrémités de w_a sont entre elles dans le rapport connu $(b + c) : a$.

Multiplication des courbes.



Si, d'un point P, on mène une droite à un point quelconque A d'une courbe donnée K, et si l'on divise cette droite par un point a tel que $Pa : PA = m : n$, le lieu géométrique de a est une courbe k, semblable à la courbe donnée.

On dit des deux courbes, qu'elles sont semblables l'une à l'autre et semblablement placées. P s'appelle le centre de similitude et les droites passant par P les rayons de similitude. On dit que les deux points A et a des courbes situés sur le même rayon sont homologues; que des droites sont homologues quand elles joignent des points homologues. Cette conception peut se généraliser; car un point quelconque du plan peut être considéré comme appartenant à un des systèmes et par suite il a son homologue dans l'autre. Le centre de similitude est alors le point du plan qui, considéré comme appartenant à un des systèmes, coïncide avec son homologue dans l'autre système. Comme la théorie de la similitude est traitée dans la plupart des ouvrages de géométrie, nous nous contenterons de rappeler les théorèmes suivants :

A une droite ou à un cercle correspond une droite ou un cercle.

Toutes les lignes homologues sont parallèles.

Tous les angles homologues sont égaux.

Toutes les lignes homologues sont dans le rapport de $m:n$. Les figures sont dites semblables suivant ce rapport.

Si l'on porte Pa sur le prolongement de PA, de l'autre côté de P, ces théorèmes subsistent encore. On dit alors que les systèmes sont inversement semblables.

Deux cercles quelconques peuvent être regardés comme directement ou inversement semblables. Les centres de similitude s'appellent les centres de similitude extérieurs ou intérieurs des deux cercles.

A l'aide de ce qu'on vient de dire, on peut résoudre un problème général qui trouve très souvent son application.

Par un point P, mener une droite qui coupe deux courbes données K et K' en des points A et a tels que PA et Pa soient entre eux dans un rapport donné $m:n$.

On considère le point donné comme un centre de similitude et l'on construit une courbe k semblable à K et dans le rapport de $n:m$. Elle coupera K' aux points cherchés. Le nombre des solutions est égal au nombre des points d'intersection de K' et k. Le problème peut toujours se résoudre avec la règle et le compas, toutes les fois que les courbes données se composent de droites et d'arcs de cercle.

Si le point donné doit être du même côté que A et a ($m:n$ positif), on trace k en similitude directe avec K; si au contraire, il doit être entre A et a ($m:n$ négatif), on construit k inversement semblable à K.

Quand il s'agira de tracer une courbe semblable à une autre courbe donnée et dans le rapport de $m:n$, je dirai, pour abréger le langage, qu'on multiplie la courbe donnée par $\pm\frac{m}{n}$ par rapport au centre de similitude, les signes $+$ et $-$ s'appliquant respectivement à la similitude directe et à la similitude inverse.

S'agit-il de multiplier une droite ? Sa direction ne change pas et il suffit par suite de multiplier un de ses points.

S'agit-il d'un cercle ? On n'a qu'à multiplier le centre et le rayon, ou le centre et un point de la circonférence.

Exemples.

117. Par un point donné O, mener une droite qui coupe deux droites données de telle manière que les distances de O aux points d'intersection soient entre elles dans le rapport $m : n$.

Prenons O comme centre de similitude et multiplions par $\pm \frac{m}{n}$ une des droites données; puis menons une droite par O et par le point d'intersection de la dernière ligne avec celle qui n'a pas été multipliée.

118. Par un point O situé à l'intérieur d'un cercle donné, mener une corde qui soit divisée par le point en deux segments qui soient entre eux dans le rapport $m : n$.

Prenons O comme centre de similitude et multiplions le cercle par $-\frac{m}{n}$; les lignes cherchées passeront alors par les points où le nouveau cercle coupe le cercle donné. Si le point donné est extérieur au cercle, on multiplie cè dernier par $\frac{m}{n}$ ou $\frac{n}{m}$.

Si le segment en dehors du cercle doit être dans le rapport de $\frac{m}{n}$ avec la corde interceptée, on multipliera par $\frac{n}{m+n}$ ou $\frac{m+n}{n}$.

119. Par un des points d'intersection O de deux cercles, mener une droite qui détermine des cordes égales dans leur intérieur.

On multiplie l'un des cercles par -1, en prenant O comme centre de similitude.

120. Dans un quadrilatère donné, inscrire un parallélogramme dont le centre soit en un point donné.

121. Construire un triangle connaissant a, b et m_c.

On construit $m_c = CE$ et on décrit des arcs autour de C comme centre, et avec les rayons a et b; on multiplie l'un d'eux par -1, en prenant E comme centre de similitude. On pourrait commencer par tracer un des côtés; on devrait alors multiplier l'un des arcs par $\frac{1}{2}$ ou l'autre par 2; cette dernière construction est plus facile à exécuter mais demande plus de place.

122. Construire un triangle, connaissant a, A et m_b.

Sur a on décrit le segment circulaire capable de l'angle A; de B on trace un arc ayant m_b pour rayon; on le multiplie par 2, ou bien on multiplie le premier cercle par $\frac{1}{2}$, en prenant C comme centre de similitude.

123. Par un point donné sur la circonférence d'un cercle, mener une corde qui soit divisée en deux parties égales par une autre corde donnée.

On prend le point donné comme centre de similitude et on multiplie la corde donnée par 2 ou le cercle par $\frac{1}{2}$.

124. Dans deux cercles concentriques, mener une droite telle que la petite corde soit la moitié de la grande.

125. Construire un triangle, connaissant a, $\frac{b}{c}$ et m_c.

126. Construire un triangle, connaissant un angle et deux médianes.

127. Construire un triangle, connaissant les trois médianes.

Ce problème se ramène à 121, puisque les médianes se coupent dans le rapport de 1 : 2.

128. Pour construire un triangle, on donne : son centre de gravité (point d'intersection des médianes), un sommet de deux courbes (droites ou cercles) sur lesquelles doivent se trouver les deux autres sommets.

129. Construire un triangle, connaissant a, m_b et $\angle (m_a, b)$.

130. Construire un triangle, connaissant b, m_b et $\angle (m_a, a)$.

131. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant $\angle A$, DB, $\angle ACB$ et le rapport des segments de AC.

132. Construire un parallélogramme, dont deux sommets opposés soient en des points donnés et les deux autres sur une circonférence donnée.

133. Dans un triangle, mener depuis A jusqu'à BC une ligne AD qui soit moyenne proportionnelle entre BC et CD.

On se sert du cercle circonscrit au triangle.

134. Construire un triangle, connaissant a, b et w_c.

135. Construire un triangle, connaissant A, b et $\angle (m_a, a)$.

136. Dans un triangle donné, mener par A une ligne telle que

les segments compris entre A et les projections de B et C soient dans un rapport donné.

137. Mener les tangentes communes à deux cercles.

Deux cercles, considérés comme figures semblables, ont deux centres de similitude. Ceux-ci sont sur la ligne des centres, et une droite menée par les extrémités de deux rayons parallèles passe par le centre de similitude extérieur ou intérieur, suivant que les rayons sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire. Une tangente menée à l'un des cercles par un des centres de similitude est aussi tangente à l'autre cercle.

138. Étant donné un point O et deux cercles, mener à chacun d'eux une tangente telle que les deux tangentes soient parallèles et que leurs distances à O soient dans un rapport donné.

En multipliant l'un des cercles par rapport à O, le problème se ramène à 137.

139. Construire un triangle, connaissant A, m_b et $\angle (a, m_c)$.

140. Sur une circonférence de cercle, on donne deux points A et B. Déterminer sur la circonférence un point X de manière que XA et XB coupent un diamètre donné en deux points Y et Z tels que leurs distances au centre soient dans un rapport donné.

On multiplie AX par rapport au centre du cercle de manière que Y tombe sur Z; A vient alors en un point connu A_1 et $\angle A_1ZB$ est connu.

141. Construire un triangle, connaissant les trois points qui divisent les trois côtés suivant des rapports donnés.

Soit ABC le triangle cherché, D, E, F, les points donnés et BD; $DA = m : n$; $AF : FC = p : q$; $CE : EB = r : s$. Prenons D comme centre de similitude et multiplions BD par $-\frac{n}{m}$, D ne change pas et B tombe au point inconnu A. Multiplions DA par $-\frac{q}{p}$ par rapport à F, A tombe en C et D vient en un point connu D_1; multiplions D_1C par $-\frac{s}{r}$ par rapport à E, C vient en

B et D_1 en un nouveau point connu D_2. Comme la direction d'une ligne droite ne change pas par la multiplication, BD_2 doit être parallèle à DB; en sorte que DD_2 coïncide avec AB. Pour avoir le côté BC, on recommence la même opération en sens inverse, en partant de E.

Cette même construction peut s'appliquer à un polygone quelconque. Considérons en particulier le cas où l'on donne les milieux de tous les côtés et où leur nombre est pair; le problème est alors indéterminé ou impossible.

142. On donne quatre cercles concentriques; mener une droite qui les rencontre respectivement en A, B, C et D, de manière que $AB = CD$.

Représentons par (AB) la puissance d'un point du cercle A par rapport au cercle B; la droite coupant respectivement les cercles pour la seconde fois aux points A_1, B_1, C_1 et D_1, on a : $(AD) = AD . AD_1$; $(BC) = BC . BC_1$; $AD_1 = BC_1$, par suite

$AD : BC = (AD) : (BC)$.

On peut aisément construire ce rapport en menant deux lignes telles que le segment compris entre A et D sur l'une soit égal au segment compris entre B et C sur l'autre. On connaît aussi maintenant le rapport $AB : AC$ et on peut tracer la ligne cherchée par un point A, arbitrairement choisi sur la circonférence A.

143. Dans un quadrilatère $ABCD$, on donne AB, BC, CD et AC; si l'on amène AB dans une position déterminée, quel sera le lieu géométrique.

α) du sommet D,

β) du milieu de la diagonale BD,

γ) du milieu de la ligne, qui joint les milieux des diagonales ?

144. Dans un cercle de centre O, on trace un diamètre fixe AOB et une corde BC qu'on prolonge jusqu'en D, de manière que $CD = BC$. On demande quel est le lieu géométrique du point d'intersection de OD et AC.

145. Trouver le lieu géométrique du point symétrique d'un point fixe A, par rapport à une droite qui tourne autour d'un autre point fixe B.

Méthode de similitude.

La méthode, qu'on a appliquée dans la multiplication des courbes, est comprise dans une autre plus générale, connue sous le nom des méthodes de similitude. On l'emploie toutes les fois qu'en omettant ou laissant de côté une des conditions imposées, on obtient un système de figures semblables (et semblablement placées). Et tandis que nous n'avons recherché jusqu'ici que des portions de la figure qui étaient complètement déterminées par les données, nous aurons maintenant à rechercher les parties de la figure dont la forme est connue.

Les cas les plus importants sont les suivants :

a) On donne une longueur, mais le reste se compose seulement d'angles et de rapports. On fait alors abstraction de la longueur donnée et on cherche à construire une figure qui ait les angles et les rapports donnés, en choisissant arbitrairement la longueur d'une des lignes de la figure. La figure ainsi tracée est alors semblable à celle qu'on cherche et l'on a cette dernière elle-même en y introduisant la ligne donnée.

146. Construire un triangle, connaissant deux angles et une ligne (médiane, hauteur, périmètre &c.).

On construit un triangle quelconque qui ait les angles donnés et on en détermine un autre semblable, qui contienne la ligne donnée.

147. Construire un triangle, connaissant A, a et $b : c$.

Un triangle quelconque renfermant l'angle A et où les côtés adjacents à cet angle seront dans le rapport donné, sera semblable au triangle cherché.

148. Construire un carré, connaissant la différence entre les diagonales et les côtés.

149. Construire un triangle, connaissant A, b et $a : c$.

150. On donne un angle au centre ACB; mener une tangente qui soit divisée suivant un rapport donné par le point de contact et les côtés de l'angle.

On commence par mener la tangente, dont la grandeur sera prise arbitrairement, et on cherche le centre du cercle. La figure a maintenant la forme exacte et on lui donnera la grandeur requise, en prenant le centre du cercle comme centre de similitude.

151. Construire un triangle, connaissant A, h_a et le rapport des segments que h_a détermine sur a.

152. Construire un triangle, connaissant ses trois hauteurs.

Le rapport des côtés est connu. D'un point quelconque menons à un cercle trois sécantes dont les segments extérieurs soient égaux aux hauteurs données, les sécantes entières sont entre elles dans le même rapport que les côtés du triangle cherché.

153. Inscrire dans une demi-circonférence un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné, de manière que deux de ses sommets soient sur le diamètre et les deux autres sur la circonférence.

On trace un demi-cercle autour du quadrilatère donné. La figure ainsi obtenue est semblable à celle qu'on cherche.

b) Dans les problèmes précédents, la position de la figure cherchée était indifférente; si au contraire la figure doit avoir une situation déterminée par rapport à des lignes ou des points donnés, il faut chercher à faire abstraction d'une condition, de manière que l'on n'ait plus qu'un système de figures semblables et semblablement placées. Alors les lieux géométriques de tous les points de la figure sont des droites passant par le centre de similitude et l'on arrive facilement à la figure cherchée, en déterminant d'abord une quelconque des figures du système, puis celle qui lui est semblable et qui remplit en même temps la condition provisoirement laissée de côté. Cette condition, qu'on est conduit de la sorte à négliger temporairement, consiste généralement en ce qu'une ligne doit avoir une longueur déterminée, ou qu'un point doit se trouver sur une ligne donnée, ou qu'une ligne doit passer par un point donné.

154. Dans un triangle donné ABC, inscrire un autre triangle abc de manière que ses côtés soient parallèles à des droites données.

Laissons de côté la condition que a doit tomber sur BC; on satisfera aux autres au moyen d'un système de triangles semblables ayant A comme centre de similitude. Traçons l'un d'eux, par exemple $a_1b_1c_1$; Aa_1 coupera le côté BC en a.

155. Inscrire un carré dans un triangle, un secteur ou un segment donné.

156. Dans un triangle donné, inscrire un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

157. Par un point donné, mener une droite qui fasse des angles égaux avec deux droites données.

158. Par un point donné, mener une droite telle que trois droites données, passant par un même point, y déterminent deux segments qui soient entre eux dans un rapport donné.

Au lieu du point donné, on prend un point quelconque sur une des droites données (117).

159. Par un point donné, mener une droite qui détermine sur les côtés d'un angle donné des segments, qui soient entre eux dans un rapport donné.

160. Dans un triangle mener à l'un des côtés une parallèle qui soit dans un rapport donné avec un des segments qu'elle détermine sur un des autres côtés.

161. Mener une droite de direction donnée, sur laquelle les côtés de deux angles donnés déterminent deux segments qui soient entre eux dans un rapport donné.

Soient BAC et DEF les angles et X le point cherché sur EF; si on laisse EF de côté, X décrira une ligne droite passant par le point de DE, qui se trouve sur une droite passant par A et ayant la direction donnée.

162. Construire un triangle isocèle, connaissant la hauteur et la médiane relatives à un des deux côtés égaux.

On peut tracer de suite le triangle dont les droites données sont les côtés et l'on connaît alors la forme du triangle qui a la médiane pour l'un de ses côtés et le sommet du triangle isocèle pour sommet opposé.

163. On donne un point A d'une circonférence et une corde BC. Mener une corde AD qui coupe BC en E, de manière que DE et DC soient entre eux dans un rapport donné.

On connaît la forme du triangle CED et on trace un triangle semblable, en prenant C comme centre de similitude.

164. On donne deux rayons dans un cercle; mener une corde qui soit divisée par eux en trois parties égales.

165. Dans un quadrilatère, inscrire un losange dont les côtés soient parallèles aux diagonales du quadrilatère.

166. Dans un triangle donné inscrire un triangle XYZ; on connaît la direction de YZ, le point de BC où X doit tomber et le rapport $XY : XZ$.

On considère BC comme n'existant pas (mais on garde bien entendu la ligne qui va de A au point donné sur BC) et on prend A comme centre de similitude.

167. Mener une ligne de direction donnée, qui divise suivant le même rapport un couple de côtés opposés d'un quadrilatère (154).

168. Dans un triangle, mener une droite parallèle à l'un des côtés et de telle manière qu'elle soit moyenne proportionnelle entre les segments suivant lesquels elle divise un des autres côtés.

169. On donne un point B et deux parallèles dont l'une passe par un point A. Mener par A et B deux nouvelles parallèles qui, avec les deux premières, déterminent : 1° un losange; 2° un parallélogramme de périmètre donné; 3° un parallélogramme dont les côtés soient dans un rapport donné.

170. Dans un triangle, inscrire un losange dont un des angles coïncide avec un angle du triangle.

171. Inscrire un triangle isocèle dans un cercle, connaissant la somme de la hauteur et de la base.

On considère $\triangle ACB$ comme le triangle cherché et on introduit dans la figure la somme donnée en prolongeant la hauteur BD jusqu'en E; on doit alors avoir $DE = 2AD$, en sorte que la forme du triangle ADE est connue; le problème se résout facilement alors en prenant E comme centre de similitude.

172. Dans un triangle, inscrire un rectangle de périmètre donné.

On introduit le demi-périmètre dans la figure.

173. Dans un triangle, inscrire un autre triangle dont un sommet A tombe en un point donné d'un des côtés; en outre l'angle A est donné et le côté opposé à cet angle doit être parallèle à une droite donnée.

174. Dans un triangle inscrire un parallélogramme dont les côtés soient entre eux dans un rapport donné. L'un des côtés doit se trouver sur BC et en outre l'un des sommets être en un point donné de BC.

175. Déterminer sur l'un des côtés d'un triangle donné un point tel que les droites menées de ce point, dans des directions données, jusqu'à rencontre des deux autres côtés aient une somme donnée.

176. On donne un point B et deux parallèles AX et CY. Mener par B une droite qui coupe les deux parallèles en deux points X et Y tels que AX et AY soient entre eux dans un rapport donné.

On fait abstraction du point B; on choisit sur AX un point arbitraire X_1, au lieu de X et on détermine le point Y_1 correspondant à Y sur AY.

177. On donne un angle A et un point P. Mener par ce dernier une droite XY, qui coupe les côtés de l'angle en des points X et Y tels que la distance du sommet de l'angle à XY soit dans un rapport donné avec XZ, qui a une

direction donnée et joint X avec un point Z sur l'autre côté de l'angle.

On fait abstraction de P et l'on choisit arbitrairement sur AX le point X_1 au lieu de X.

178. Dans un triangle ABC, mener une ligne de direction donnée qui coupe AB en X, BC en Y, de telle manière que AX et CY soient entre eux dans un rapport donné.

La forme de $AXYC$ est connue; on prend A comme centre de similitude et on choisit B à la place de X.

179. Dans un triangle ABC, mener une transversale XY de manière que $BX = XY = YC$.

La forme de $BXYC$ est connue.

A ce problème on peut ramener le suivant : Construire un triangle, connaissant A, $a + b$ et $a + c$.

180. Dans un triangle ABC, mener une transversale XY parallèle à BC, de manière qu'il y ait une relation homogène donnée entre XY, XB et YC (par exemple : $\overline{XY}^2 = XB \cdot YC$; $\overline{XY}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{YC}^2$, &c.).

181. Tracer un cercle, qui passe par un point donné A et soit tangent à deux droites données, qui se coupent en O.

Un cercle quelconque, tangent aux deux droites, doit être semblable à celui qu'on cherche, O étant le centre de similitude. La droite OA doit couper le cercle ainsi tracé en un point qui est l'homologue du point A dans le cercle cherché. Aux deux points d'intersection correspondent donc deux solutions. Menons dans le cercle tracé des rayons allant aux points d'intersection; nous aurons les centres des cercles cherchés, en menant par A des parallèles à ces rayons.

182. Sur une droite donnée, trouver un point qui soit à égales distances d'un point donné et d'une droite donnée (Intersection d'une droite et d'une parabole).

On fait abstraction du point donné et on choisit le point d'intersection des droites données comme centre de similitude. En réalité, ce problème est le même que le précédent.

183. Sur une droite donnée, trouver un point dont les distances à un point donné et à une droite donnée soient dans un rapport donné (Intersection d'une droite et d'une conique déterminée par un foyer, une directrice et l'excentricité).

Au lieu de la perpendiculaire abaissée du point cherché sur la ligne donnée on peut choisir une droite qui fasse avec la droite donnée un angle quelconque donné, sans qu'il y ait de changement essentiel dans la solution.

184. Construire un cercle qui ait son centre sur une droite donnée, qui passe par un point donné et sur lequel une droite donnée détache un arc dont l'angle au centre soit donné.

185. Tracer un cercle qui passe par deux points donnés et soit tangent à une droite donnée.

186. Dans un triangle ABC, mener une ligne de direction donnée, qui coupe AB en X et BC en Y, de manière que XY et YA aient une somme donnée.

187. Construire un triangle, connaissant a, B et $b - h_a$.

On prolonge h_a du segment donné $b - h_a$ au delà de a (182).

188. Construire un triangle, connaissant A, $a - c$, et $h_b + CD$, D désignant le pied de h_b.

On prolonge CD jusqu'en E, de manière que $DE = h_b$ et BA jusqu'en F, de manière que $AF = a - c$. Comme on le voit facilement, on peut tracer CE, $\angle CEB = 45^o$ et mener par F une parallèle à CE. On détermine alors B (183).

189. Construire un triangle, connaissant a, A et $b + nc$; n est un nombre donné.

190. Construire un triangle, connaissant A, $b + c$ et $a + c$.

On prolonge b de c au delà de A jusqu'en D, et c de a au delà de B; on voit alors qu'on peut tracer CD, puis DB et déterminer B (183).

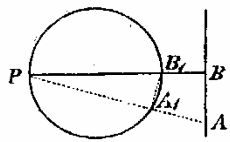
191. Dans un triangle donné ABC, inscrire une demi-circonférence, tangente à BC en un point donné P et dont les deux extrémités soient sur les deux autres côtés.

On multiplie AB ou AC par -1 par rapport à P, et le problème se ramène au N° 173.

Figures inverses.

Une droite tourne autour d'un point fixe P (le centre d'inversion) tandis qu'en même temps un point mobile A de la droite parcourt une courbe donnée K. Sur la droite, déterminons un point A_1 par la condition que $PA.PA_1 = I$, où I (la puissance d'inversion) est une quantité constante (positive ou négative). Le point A_1 décrira une courbe K_1. On dit des courbes K et K_1 que l'une est la courbe *inverse* de l'autre (la transformée par rayons vecteurs réciproques). A et A_1 sont dits points *correspondants*.

La courbe inverse d'une droite est un cercle qui passe par le centre d'inversion.



Soit PB une perpendiculaire à la droite donnée, B et B_1 deux points correspondants et A et A_1 deux autres points correspondants. De la relation

$$PA.PA_1 = PB.PB_1$$

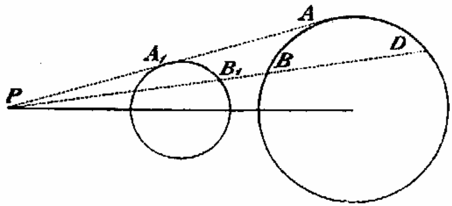
il résulte que les triangles BPA, A_1PB_1 sont semblables, en sorte que $\angle PA_1B_1 = \frac{\pi}{2}$. Le lieu géométrique de A_1 est donc un cercle qui a PB_1 pour diamètre.

Si la droite donnée passe par le centre d'inversion, elle est à elle-même sa propre courbe inverse.

Si A_1 parcourt la circonférence, A décrira la droite; la courbe inverse d'un cercle passant par le centre d'inversion est donc une droite.

La courbe inverse d'un cercle, qui ne passe pas par le centre d'inversion, est un cercle; et le centre d'inversion est un centre de similitude pour celui-ci et pour le cercle donné.

Soient B et B_1 deux points correspondants, tandis que PB coupe le cercle une seconde fois en D. Les deux produits $PB \times PB_1$ et $PB \times PD$ sont alors constants; par suite le rapport $PB_1 : PD$ est aussi constant. On trouve donc le lieu



géométrique de B_1 en multipliant par rapport à P le lieu géométrique de D (le cercle donné) par une constante. Le lieu est ainsi un cercle semblable au cercle donné et ayant P pour centre de similitude. Si la puissance d'inversion est égale à la puissance de P par rapport au cercle donné, ce dernier sera à lui-même sa propre courbe inverse.

On a prouvé que B et B_1 parcourent en même temps des circonférences; il faut toutefois remarquer qu'ils ne décrivent pas en même temps des arcs semblables; au contraire B_1 et D parcourent des arcs semblables et semblablement placés.

On peut maintenant résoudre le problème général suivant :

Par un point donné P, mener une droite sur laquelle deux courbes données K et K_1 déterminent deux segments PX et PX_1 dont le produit soit donné.

Faisons abstraction de K_1; le lieu géométrique de X_1 sera la courbe inverse de K, qui aura P pour centre d'inversion et le produit donné comme puissance d'inversion. X_1 sera donc déterminé comme point d'intersection de cette courbe avec K_1. Le problème peut se résoudre avec le compas et la règle, toutes les fois que les courbes données se composent de droites et d'arcs de cercle.

192. Par un point donné P mener une droite qui coupe les côtés d'un angle donné en A et B de telle sorte que $PA.PB = a^2 . a$ étant un segment donné.

193. On donne un cercle, un de ses diamètres et un point P. Mener par P une droite qui coupe le cercle en X et le diamètre en Y, de manière que $PX.PY = a^2$.

194. Par l'un des points d'intersection de deux cercles mener une droite telle que les cordes déterminées sur elle par ces deux cercles aient un produit donné.

195. Construire un triangle ABC, connaissant le côté du carré inscrit dont deux sommets sont sur BC, $\angle A$ et le produit des deux segments qu'un sommet du carré détermine sur AB.

196. Construire un triangle, connaissant a, A et $BD.BA$, D étant le pied de h_c.

L'inversion s'employe souvent avec avantage, quand on veut exécuter une construction ou donner une démonstration, parce que la figure inverse est souvent plus simple que la figure donnée. Nous appellerons entre autres l'attention ici sur les relations suivantes qui existent entre deux figures inverses.

a) Si deux courbes se coupent ou sont tangentes en A, les courbes inverses se couperont ou seront tangentes au point A_1 qui correspond à A.

En effet, si A est sur les deux courbes, A_1 doit se trouver sur les deux courbes inverses; et si deux points d'intersection se réunissent en A, leurs correspondants coïncident également en A_1.

Si A est au centre d'inversion, le théorème n'a plus lieu parce qu'en général à ce point ne correspond plus un point, mais la droite de l'infini.

b) Si deux courbes se coupent en A sous un certain angle (l'angle de leurs tangentes), les courbes inverses se couperont en A_1 sous le même angle (mais pris avec un signe contraire, si l'on mesure l'angle depuis l'une des courbes jusquà l'autre).

On voit aisément (fig. pg. 35 et 36) que le théorème a lieu quand l'une des courbes est un cercle et l'autre une droite passant par le centre d'inversion. Il subsiste encore pour deux cercles quelconques; car une droite menée de A au centre d'inversion passe par A_1. A l'aide de cela, on peut alors démontrer facilement que le théorème a lieu pour deux courbes quelconques; car elles forment entre elles en A le même angle que deux cercles quelconques, tangents chacun à l'une des courbes en A.

Applications.

197. Construire un cercle passant par un point donné P et tangent à deux cercles donnés.

En faisant l'inversion avec P comme centre d'inversion, le problème se ramène à mener la tangente commune à deux cercles. On peut choisir la puissance d'inversion de manière que l'un des cercles ne change pas.

198. Démontrer qu'un cercle quelconque, passant par les intersections de deux cercles, coupe sous le même angle un système de cercles tangents aux deux cercles donnés (et par suite aussi une tangente commune).

Par inversion, ce théorème se ramène au suivant : Une droite quelconque, qui passe par le centre de similitude d'un système de cercles semblablement placés, coupe tous les cercles sous des angles égaux.

199. Construire un cercle tangent à trois cercles qui passent tous par le même point.

200. Dans un cercle donné, inscrire un quadrilatère dont les côtés passent chacun par un point donné.

Soient a, b, c et d les points par lesquels passent respectivement AB, BC, CD et DA. On se sert de ces points comme centres d'inversion en prenant comme puissance d'inversion pour chacun d'eux sa puissance par rapport au cercle. Après quatre inversions successives autour de a, b, c et d, A viendra retomber en A. Soit P le point qui, après trois inversions autour de a, b et c vient tomber en d; on trouve ce point en faisant successivement l'inversion de d autour de c, b et a. Tout cercle ou toute droite passant par P se transforme, après inversion autour de a, b et c, en un cercle passant par d et en conséquence, par inversion autour de d, devient une droite. La droite PA, après quatre inversions, se transforme donc en une droite P_1A, P_1 étant le point que l'on obtient quand on fait successivement l'inversion de a autour de b, c et d. Mais comme l'angle que PA fait avec le cercle n'a changé ni en grandeur ni en signe après les quatre inversions, et que le cercle reste le même, PA et P_1A doivent former une seule et même droite.

La solution est donc la suivante : On détermine P_1 par l'inversion de a autour de b, c et d; puis P par l'inversion de d autour de c, b et a. La ligne PP_1 coupe le cercle en A.

La solution peut s'étendre facilement à une figure quelconque d'un nombre pair de côtés.

201. Dans un cercle inscrire un triangle ABC de manière que chaque côté passe par un point donné (a, b et c).

On procède comme dans le problème précédent, en ne faisant que trois inversions au lieu de quatre. La conséquence en est que PA et P_1A ne forment plus une même droite, parce que les angles qu'elles font avec le cercle sont de signe contraire. On fait l'inversion, autour de a, b et c, d'un des points où Pa coupe le cercle; soit Q le point ainsi trouvé. Après l'inversion, les lignes aP et PA se sont donc transformées en QP_1 et P_1A qui font entre elles le même angle que les deux premières lignes. Ces angles ont le même signe (on en voit facilement la raison, en suivant l'inversion; les lignes se correspondent deux à deux, mais leurs points d'intersection ne se correspondent pas) et les quatre lignes forment un quadrilatère composé de cordes, tel que A se trouvera déterminé par un cercle passant par P, P_1 et le point d'intersection de aP et P_1Q.

Cette solution peut facilement s'étendre à un polygone quelconque d'un nombre impair de côtés.

Lieux géométriques en général.

En outre des lieux géométriques que nous avons indiqués dans ce qui précède, il en existe beaucoup d'autres, qui sont souvent appliqués, mais dont l'étude individuelle prendrait trop de temps. Il faudra donc, dans chaque problème où les lieux mentionnés plus haut ne pourraient pas trouver leur emploi, rechercher ou tâcher de trouver les droites ou les cercles qui sont les lieux géométriques des points de la figure. Dans ce cas, un dessin fait avec soin pourra être un auxiliaire, peu scientifique il est vrai, mais très pratique.

Il arrive souvent que, si l'on a une figure qui doit être tracée dans une position déterminée, on pourra, en laissant de côté une des conditions qui lui sont imposées, la dessiner dans une situation en partie arbitraire, puis la remener dans la position requise par une translation parallèle ou une rotation autour d'un certain point. Les lieux géométriques des points de la figure sont respectivement alors des droites parallèles ou des cercles concentriques.

Exemples.

202. Tracer un cercle de rayon donné, dont le centre soit sur une droite donnée et dans lequel une autre droite donnée détermine une corde de longueur donnée.

     On trace le cercle de manière que, dans une position arbitraire, il intercepte la corde donnée sur la droite donnée; on peut ensuite l'amener dans la position requise en faisant décrire à son centre une droite parallèle à la droite donnée.

203. Décrire un cercle de rayon donné, dont le centre soit sur une circonférence donnée et qui coupe un autre cercle suivant une corde de longueur donnée.

204. Décrire un cercle de rayon donné, qui passe par un point donné et coupe une droite donnée suivant une corde de longueur donnée.

205. Construire un triangle congruent à un triangle donné, qui ait un côté sur une droite donnée et le sommet opposé sur une autre droite donnée.

206. Dans un segment de cercle donné, inscrire un triangle congruent à un triangle donné.

207. Décrire un cercle de rayon donné, qui coupe deux droites ou deux cercles donnés suivant des cordes données.

208. Mener à un cercle une tangente sur laquelle deux droites parallèles données, ou deux cercles concentriques donnés, interceptent un segment de longueur donnée.

209. Par un point donné mener une droite telle que le segment de cette droite, compris entre deux cercles concentriques donnés, soit vu de leur centre sous un angle donné.

210. On donne deux cercles; déterminer un point tel que les tangentes menées aux deux cercles comprennent un angle donné et que l'une d'elles ait une longueur donnée.

On mène la tangente dont la longueur est donnée, de manière qu'elle soit tangente à l'un des cercles en un point quelconque et, à son extrémité, on construit l'angle donné; on fait alors tourner l'autre cercle autour du centre du premier jusqu'à ce qu'il soit tangent à la seconde ligne; puis on ramène le tout dans la première position.

211. Tracer un cercle, qui soit tangent à deux parallèles données et passe par un point donné.

212. Par un point donné, mener une ligne sur laquelle deux couples de parallèles déterminent des segments égaux.

La ligne doit être parallèle à la diagonale du parallélogramme formé par les deux couples de parallèles.

213. Tracer deux cercles de rayons donnés de telle sorte que l'un d'eux détermine sur une droite une corde de longueur donnée et que l'autre intercepte sur une seconde droite une autre corde donnée; de plus les cercles doivent être tangents et leur tangente commune doit avoir une direction déterminée.

214. Dans un cercle donné, inscrire un triangle dont un côté est donné et dont la médiane relative à ce côté passe par un point donné et ait une direction donnée.

215. Inscrire dans un cercle un triangle, dont on donne un côté et la médiane relative à un des autres côtés et qui

soit tel que le point d'intersection des médianes soit sur un diamètre donné.

216. Dans un cercle donné mener une corde de longueur donnée de telle manière qu'elle soit coupée par un diamètre donné, suivant un rapport donné.

217. Dans un quadrilatère donné, inscrire un parallélogramme dont les côtés aient des directions données.

On fait abstraction d'un des côtés du quadrilatère; alors le sommet libre du parallélogramme décrit une droite.

218. Par un point donné, mener une droite qui coupe trois droites données de telle manière que les points d'intersection et le point donné soient harmoniques.

On laisse une des droites de côté; alors le point libre décrit une droite qui passe par le point d'intersection des deux autres droites données.

219. Construire un triangle, connaissant w_a, B et la distance de C à w_a.

On trace w_a et on élève une perpendiculaire à w_a en A. Le problème est maintenant ramené au précédent, avec cette différence qu'à la place d'une des droites données, on a l'arc qui est capable de $\angle B$.

B. Lieux géométriques de lignes.

La ligne droite, de même que le point, est déterminée quand elle doit satisfaire à deux conditions. Comme celui-ci aussi, elle sera partiellement déterminée par une seule condition, parce qu'il existe toujours une courbe à laquelle doivent être tangentes toutes les lignes qui remplissent cette condition. Par analogie, on peut donc donner à cette courbe le nom de lieu géométriques des lignes. Dans des cas particuliers, cette courbe peut être un point, en sorte que toutes les lignes, qui ont la propriété requise, passent par ce point. A l'exception de ce cas, nous n'aurons à considérer ici que ceux où la courbe est un cercle.

Si donc on peut déterminer deux lieux géométriques pour une ligne, le problème se ramène à l'un des suivants :

1°. Mener une droite par deux points donnés.

2°. Par un point donné, mener une tangente à un cercle (16).

3° Mener la targente commune à deux cercles (137).

Dans ce qui suit, nous indiquons les lieux géométriques de lignes les plus importantes.

l. Le lieu géométrique de toutes les cordes égales d'un même cercle est un cercle concentrique au cercle donné.

On trace dans le cercle la corde de longueur donnée et l'on mène le cercle concentrique qui lui est tangent.

m. Le lieu géométrique des lignes, dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné, est le point qui divise, suivant le rapport donné, la ligne qui joint les points donnés. Il faut prendre les distances chacune avec un signe.

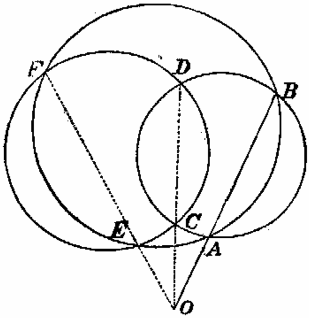
n. Le lieu géométrique des lignes, dont les distances à deux points donnés ont une somme donnée, est un cercle dont le centre est au milieu de la ligne qui joint les points.

Si la différence des distances doit être égale à une ligne donnée, le lieu géométrique se compose de deux points infiniment éloignés et les lignes forment alors deux systèmes de parallèles. Leur direction est déterminée par les tangentes qu'on mène d'un des points au cercle décrit autour de l'autre comme centre, avec la ligne donnée pour rayon.

Les distances doivent être prises ici chacune avec un signe.

o. Dans un cercle, on trace des angles inscrits dans le même arc et on les divise suivant les deux mêmes angles; le lieu géométrique des lignes de division est le point de l'arc que l'on obtient en divisant de la manière donnée un quelconque des angles inscrits.

p. Par deux points donnés, on mène des cercles qui coupent (ou sont tangents à) un cercle donné, le lieu géométrique des cordes communes est un point de la ligne qui joint les points donnés.



Soient A et B les points donnés, et supposons un cercle quelconque, mené par ces points, qui coupe le cercle donné en C et D. La ligne CD rencontrera alors AB en O, lieu géométrique cherché; car si un autre cercle quelconque, passant par A et B, coupe le cercle fixe aux points E et F, les lignes FE, DC et AB sont les lignes d'égale puissance des trois cercles; et comme elles se coupent en un même point, EF doit passer par O.

Exemples.

220. Par un point donné, mener une droite qui soit coupée par un cercle donné suivant une corde de longueur donnée.

A l'aide de **1**, le problème se ramène à 16.

221. Mener une droite qui détermine dans deux cercles donnés des cordes de longueurs données.

222. Mener une droite qui coupe une droite donnée en X et un cercle donné en Y et Z, de manière que XY et YZ aient des longueurs données.

A l'aide de **1**, le problème se ramène à 11.

223. Inscrire dans un cercle donné un triangle semblable à un triangle donné et dont un côté passe par un point donné.

224. Tracer dans un cercle donné une corde de longueur et de direction données.

225. Inscrire dans un cercle donné un triangle dont un côté soit égal et parallèle à une ligne donnée et dont la bissectrice de l'angle opposé passe par un point donné.

On a immédiatement un côté (l); on connaît alors deux points de la bissectrice de l'angle opposé.

226. Dans un cercle donné, inscrire un triangle, connaissant la direction d'un côté, la bissectrice de l'angle opposé et un point de cette dernière.

La direction donnée d'un côté détermine le milieu de l'arc correspondant et par suite la bissectrice de l'angle opposé.

227. Par un point donné mener une droite dont la distance à un point donné soit égale à la somme de ses distances à deux autres points donnés.

228. On donne les points A et B sur une circonférence de cercle donnée. Par un point donné P, mener une droite qui coupe le cercle aux deux points X et Y, de telle manière que AX et BY forment entre elles un angle donné (220).

229. Diviser un arc de cercle en deux parties telles que leurs cordes soient dans un rapport donné.

L'angle que font entre elles les cordes cherchées sera bissecté par la ligne qui divise la corde de l'arc donné suivant le rapport donné et qui passe par le milieu de l'arc qui, avec l'arc donné, complète la circonférence entière.

230. Par un point donné, mener une droite qui passe par le point d'intersection de deux droites données, sans que celles-ci soient prolongées de manière à se couper.

On mène entre les lignes données deux parallèles, dont l'une passe par le point donné; la ligne cherchée coupe les deux parallèles dans le même rapport.

231. Construire un triangle, connaissant les portions suivant lesquelles $\angle A$ et a sont partagées par une ligne AD.

On trace le cercle circonscrit dans lequel a est une corde; on connaît alors deux points de AD (o).

232. Construire un triangle, connaissant h_a, w_a et m_a.

Les triangles rectangles, qui sont déterminés par les trois lignes données peuvent se construire immédiatement. On connaît alors le point A et la ligne sur laquelle se trouve a; il s'agit maintenant de déterminer B et C. On les obtient en construisant le cercle circonscrit au triangle. A cet effet, prolongeons w_a et élevons une perpendiculaire sur le milieu de a; ces deux lignes doivent se couper au milieu de l'arc que sous-tend a. Ce point trouvé, le cercle se construit facilement.

233. Mener à un cercle une tangente dont les distances à deux points donnés aient une somme donnée.

234. Étant donné un quadrilatère $ABCD$, mener une droite qui soit à égale distance de A et C, et de B et D. (Distances égales prises avec des signes contraires.)

235. Dans un cercle donné, inscrire un quadrilatère $ABCD$, connaissant la diagonale AC, l'angle que font les diagonales et sachant en outre que le quadrilatère cherché doit être circonscriptible à un cercle.

On trace la diagonale AC comme corde dans le cercle ; on connaît la direction de BD, par suite aussi les milieux des arcs que sous-tend BD. On peut alors mener les lignes qui bissectent les angles A et C et celles-ci doivent se couper au centre du cercle inscrit. Les lignes, qui bissectent les angles B et D, doivent passer par ce centre et par les milieux des arcs que sous-tend AC; on peut donc les tracer et par suite B et D sont déterminés.

236. Construire un carré dont les côtés doivent respectivement passer par un des points A, B, C et D.

Sur AB et CD, comme diamètres, on décrit des cercles qui sont les lieux géométriques de deux des sommets du carré; comme la diagonale d'un carré en bissecte les angles, elle doit passer par les milieux des deux demi-circonférences; on peut donc la tracer immédiatement. Elle détermine ainsi deux sommets du carré et par suite les deux autres.

237. Construire un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné et dont les côtés passent respectivement par quatre points donnés.

Ce problème est une généralisation facile du précédent et se résout d'une manière analogue, puisque les diagonales divisent les angles d'une manière connue.

238. Par deux points donnés mener un cercle tangent à un cercle donné.

Par les deux points donnés, A et B, on mène un cercle quelconque coupant le cercle donné. La corde commune rencontre AB en un point qui doit aussi se trouver sur la tangente commune au cercle donné et à celui qu'on cherche. Si donc on mène cette tangente, on obtient le point de contact des deux cercles et par suite le centre du cercle demandé.

Ce problème peut aussi s'énoncer de la manière suivante : On donne un cercle et deux points A et B; trouver sur la circonférence du cercle un point X tel que les lignes XA et XB le coupent en deux autres points dont la ligne de jonction soit parallèle à AB.

239. Par deux points donnés, mener un cercle qui coupe un cercle donné suivant une corde donnée.

240. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant CA, BD, $\angle A$ et $\angle ACB$.

On trace BD et on détermine le point A au moyen de **e** et de **o**.

142. Par deux points donnés, mener un cercle qui coupe un cercle donné de manière que la corde commune soit tangente à un autre cercle donné.

242. Par deux points donnés, tracer un cercle qui coupe un cercle donné de manière que les distances de la corde commune à deux points donnés soient entre elles dans un rapport donné.

243. Construire un triangle congruent à un triangle donné, de manière que deux de ses côtés passent par des points donnés et que la bissectrice de leur angle soit tangente à un cercle donné.

244. On donne deux parallèles, un point A sur l'une, et un point B sur l'autre; mener par un point donné P une droite qui coupe ces parallèles en X et Y de telle manière que les segments AX et BY soient entre eux dans un rapport donné.

245. On donne un cercle et trois points A, B et C. Mener par A et B deux cordes ZX et VY telles que XY et ZV passent par C.

DEUXIÈME CHAPITRE

TRANSFORMATION DES FIGURES

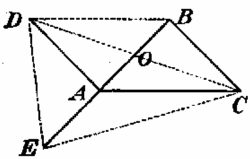
Pour que les méthodes développées dans la section précédente puissent s'appliquer, il faut que, dans la figure qu'on trace, les éléments donnés soient les uns par rapport aux autres dans des relations assez simples et notamment qu'ils soient assez près les uns des autres; parce qu'on arrive souvent ainsi à construire de suite une grande partie de la figure de manière à ramener le problème à la détermination d'un point ou d'une ligne. Quand il n'en est pas ainsi, on ne peut pas recourir immédiatement aux lieux géométriques; mais ce que nous avons établi précédemment conduit facilement au principe qu'on devra appliquer alors et qui forme la base fondamentale de l'analyse qui suit. De la figure qu'on aura tracée, on devra chercher à en déduire une autre, où les éléments donnés se trouvent rassemblés de telle manière qu'on puisse effectuer la construction. Quand cette figure aura été déterminée, on pourra en général revenir à celle dont il était d'abord question. Les méthodes qui peuvent servir à effectuer cette transformation sont

A. *La translation parallèle,*
B. *Le retournement,*
C. *Le déplacement par rotation.*

A. Translation parallèle.

On se sert de cette méthode pour rapprocher les uns des autres les éléments donnés, en transportant quelques-unes des lignes de la figure dans de nouvelles positions, parallèles aux positions primitives. En particulier, cette méthode pourra souvent s'appliquer quand on connaîtra deux lignes de la figure et l'angle qu'elles font entre elles, parce qu'en déplaçant l'une d'elles de manière qu'une de ses extrémités coïncide avec une extrémité de l'autre, on obtiendra un triangle qu'on peut construire de suite. Dans un polygone quelconque, on peut rapprocher les éléments les uns des autres en transportant tous les côtés parallèlement à eux-mêmes, de telle sorte qu'ils passent tous par un même point. Les lignes peuvent être tracées dans une direction telle que les angles qu'elles font entre elles soient égaux aux angles extérieurs du polygone primitif, dont la somme est, comme on le sait, égale à 4 angles droits. En joignant les extrémités des lignes, on obtient un nouveau polygone qui est souvent plus facile à construire que le premier. Les cas particuliers qui suivent le feront mieux comprendre.

Triangle. Par translation, on déduit du triangle ABC le triangle CDE; $AE = AB$ et $DB = AC$. Les lignes qui partent de A ont les côtés du triangle primitif et les angles formés autour de A sont les angles extérieurs. Comme $DC = 2\,CO$, les côtés du nouveau triangle sont le double des médianes du triangle primitif, tandis que réciproquement A est le point d'intersection des médianes du nouveau triangle. Comme B et D sont à égale distance de AC, les hauteurs du triangle ABC se retrouvent dans les triangles qui se joignent en A. Comme dans la translation parallèle les angles ne changent pas, tous ceux que font entre eux les côtés, les hauteurs et les médianes se retrouvent dans la nouvelle figure. Puisque $\triangle DAC = \triangle ABC$, la surface de DEC est triple de



celle de ABC. Toutes les fois qu'on pourra tracer le $\triangle DEC$, ou l'un des petits triangles, on pourra facilement revenir de ceux-ci au $\triangle ABC$.

Exemples.

246. Construire un triangle, connaissant ses trois médianes.
On construit DEC et on en déduit A et B.

247. Construire un triangle, connaissant m_c, h_a et h_b.
On trace DOC (35); puis on mène $OB = OA$.

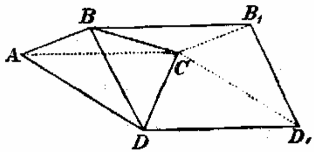
Construire un triangle, connaissant

248. h_a, m_a et m_b.
249. h_a, m_b et h_c.
250. h_a, m_b et m_c.
251. A, h_a et m_a.
252. h_a, m_a et $h_c : b$.
253. A, h_a et m_b.
254. m_a, m_c et $\angle (m_b, a)$.
255. m_a, h_a et h_b.
256. h_a, h_b et $\angle (m_a, b)$.
257. h_a, a et $\angle (m_b, c)$.
258. h_a, $b + c$ et $h_b : h_c$.

Quadrilatère. Dans un quadrilatère $ABCD$, on peut transporter AB et AD en CB_1 et CD_1. Le parallélogramme BB_1D_1D ainsi formé contiendra alors beaucoup des éléments du quadrilatère en liaison simple les uns avec les autres.

Les lignes qui partent de C sont les côtés du quadrilatère.

Les angles formés autour de C sont les angles du quadrilatère.



Les côtés du parallélogramme sont les diagonales du quadrilatère et leur angle est celui qui est compris entre les diagonales de ce dernier.

La surface du parallélogramme est le double de celle du quadrilatère.

Les diagonales sont le double des lignes qui joignent les milieux des côtés opposés; on le reconnaît aisément en considérant le parallélogramme qu'on forme en joignant successivement les milieux des côtés du quadrilatère.

On retrouve ainsi dans le parallélogramme toutes les quantités que l'on considère généralement dans le quadrilatère.

La translation se montre surtout à son avantage, quand on connaît les diagonales et leur angle; car, dans ce cas, on peut immédiatement tracer le parallélogramme et le problème se ramène à déterminer le point C. On a de suite deux lieux géométriques de ce point, quand on connaît deux des éléments indiqués ci-dessus, ou une certaine dépendance entre plusieurs d'entre eux (par exemple, le rapport de deux côtés, la somme ou la différence de leurs carrés, &c.). La classe très nombreuse de problèmes, qu'on peut ainsi résoudre sans coup férir, s'augmente encore considérablement si l'on remarque que, dans un quadrilatère, on peut considérer deux côtés opposés quelconques comme des diagonales et les diagonales comme des côtés; et en effet, on peut par ce moyen résoudre les problèmes correspondants, où l'on donne deux côtés opposés et leur angle, au lieu des deux diagonales et de leur angle.

Pour mieux faire comprendre la méthode, nous allons, dans ce qui suit, l'appliquer à quelques problèmes de diverses espèces.

Exemples.

259. Construire un trapèze, connaissant ses quatre côtés.

Transportons l'un des côtés non parallèles jusqu'à ce qu'il rencontre l'autre; nous donnons naissance à un triangle, dont les trois côtés sont connus.

260. Dans un cercle, on mène deux cordes AB et CD. Trouver sur sa circonférence un point X tel que les lignes XA et XB déterminent sur la corde CD un segment FG, égal à une ligne donnée.

Transportons FG de manière que F tombe en A; G viendra en un point H, que nous pouvons déterminer immédiatement; nous déterminons ensuite d'après cela le point G au moyen de **e**, puisque $\angle G = \angle X$ (comme inscrits dans le même arc AB).

261. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et la ligne EF qui joint les milieux de AB et CD.

Pour rassembler les éléments, transportons BC et AD parallèlement à eux-mêmes jusqu'à ce qu'ils soient dans les positions EC_1 et ED_1. C_1, F et D_1 sont alors en ligne droite, puisque $\triangle C_1CF \cong D_1DF$. On peut maintenant construire le $\triangle C_1ED_1$ (121); puis on détermine C et D. La construction montre que l'angle que forment les côtés opposés, $\angle C_1ED_1$, est indépendant de la longueur des deux autres.

La construction peut aussi s'effectuer au moyen de la translation générale indiquée plus haut.

262. Par le point d'intersection de deux cercles, mener une droite sur laquelle les deux cercles déterminent des cordes ayant une différence donnée. (Les cordes doivent être affectées d'un signe et être comptées à partir du point d'intersection.)

La projection de la ligne des centres sur la ligne cherchée est égale à la moitié de la différence donnée. Transportons la projection jusqu'à ce qu'une de ses extrémités tombe en un des centres; elle formera avec la ligne des centres un triangle rectangle qu'on peut construire. La ligne cherchée sera alors parallèle à l'un de ses côtés. Si l'on donne la demi-somme des cordes, on peut l'introduire dans la figure, en multipliant par -1 l'un des cercles, par rapport au point d'intersection, substituer ce nouveau cercle à la place de celui qui était donné et effectuer la construction qu'on a indiquée plus haut.

263. Construire un rectangle, ayant un côté donné et tel que chaque côté passe par un point donné (262).

264. Dans un triangle donné ABC, mener par un point X de AB et un point Y de BC une ligne telle que XY ait une longueur donnée et que $AX : CY = p : q$.

Transportons parallèlement XY jusque dans la position AY_1; nous pourrons alors déterminer le point Y_1, puisqu'on connaît sa distance à A et la forme du triangle Y_1YC.

265. Mener une droite de direction donnée qui rencontre deux cercles donnés de telle manière que les cordes interceptées aient une somme ou une différence donnée.

On déplace l'un des cercles suivant la direction donnée jusqu'à ce qu'il coupe l'autre sur la ligne cherchée. Dans cette situation, on détermine aisément son centre.

266. Par un point donné, mener une droite qui soit coupée par deux cercles donnés suivant des cordes égales.

On transporte l'un des cercles de manière à faire coïncider les cordes égales. Son centre peut alors se déterminer par cette double propriété que l'on voit de ce point la ligne des centres sous un angle droit et que sa distance au point donné est connue; la tangente menée du point donné à ce cercle est en effet égale à la tangente menée du même point au cercle fixe.

267. Dans deux cercles donnés, dont les centres sont A et B, mener deux rayons parallèles AX et BY qui soient vus d'un point donné P sous des angles égaux.

On transporte parallèlement le triangle AXP d'une longueur égale et parallèle à la ligne des centres et on le multiplie en même temps par le rapport des rayons de manière que AX et BY coïncident. Le point P viendra alors dans une nouvelle position P_1 qu'on détermine aisément puisqu'on connaît la longueur et la direction de la ligne BP_1. Comme $\angle YP_1B = \angle XPA$, les points P, P_1, B et Y doivent se trouver sur une même circonférence; ce qui détermine Y.

268. Construire un parallélogramme, connaissant les côtés et l'angle des diagonales.

Transportons parallèlement l'une des diagonales jusqu'à ce qu'une de ses extrémités tombe sur une extrémité de l'autre. Nous pouvons alors construire le triangle dont les diagonales sont les côtés (18).

269. Construire un trapèze, connaissant les diagonales, la ligne qui joint les milieux des côtés non parallèles et un angle.

Par le même procédé que dans le cas précédent, on ramène ce problème à 3.

270. Dans quel cas le point C sera-t-il sur une des diagonales du parallélogramme, résultat de la translation générale dans un quadrilatère ?

Au moyen de la translation parallèle, on peut résoudre un problème général qu'on rencontre souvent :

Entre deux courbes données mener une ligne qui soit égale et parallèle à une ligne donnée.

On déplace l'une des courbes d'une longueur égale et parallèle à la ligne donnée; elle coupera l'autre courbe au point où il faut mener la ligne. Ce problème peut toujours se résoudre avec la règle et le compas quand les courbes sont des systèmes composés de droites et d'arcs de cercle.

271. Mener une ligne égale et parallèle à une ligne donnée et qui ait ses extrémités sur deux circonférences données.

272. Dans un triangle, mener une transversale de longueur donnée, parallèlement à un des côtés.

273. Dans un cercle, mener une corde qui soit égale et parallèle à une ligne donnée.

274. D'un navire on voit deux points connus sous un angle donné; ce navire s'avance d'une longueur donnée suivant une direction donnée et on voit alors les deux mêmes points sous un autre angle connu; on demande de déterminer le lieu de navire.

Par les points donnés, on fait passer des arcs de cercle capables des angles donnés; le problème est alors ramené à 271.

On emploie souvent un genre spécial de translation parallèle, quand on a affaire à des cercles qui touchent d'autres cercles ou des droites; on imagine que le rayon d'un des cercles diminue jusqu'à zéro, pendant qu'en même temps les droites ou les cercles tangents suivent le mouvement, en conservant les unes leurs directions, les autres leurs centres. On arrive souvent ainsi à ramener un problème à un autre plus simple, où les autres conditions imposées restent les mêmes, mais où un cercle est remplacé par un point.

275. Mener la tangente commune à deux cercles.

Faisons diminuer le plus petit jusqu'à ce qu'il se réduise à un point, tandis que les tangentes le suivent; l'autre cercle doit continuer à être tangent aux tangentes; il prendra donc un rayon égal à la somme ou à la différence des rayons donnés, suivant que l'on considérera les tangentes intérieures ou extérieures. Le problème se ramène ainsi à 16.

276. Construire un cercle tangent à deux droites données et à un cercle donné.

Faisons décroitre le cercle donné, jusqu'à ce qu'il se réduise à son centre; le problème se ramène à 181. Le cercle cherché peut être tangent au cercle donné de deux manières différentes, auxquelles correspond la translation des tangentes dans des directions opposées.

277. Construire un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée, en un point donné.

278. Construire un cercle tangent à deux cercles donnés, et à l'un d'eux en un point donné.

Exemples divers de translation parallèle.

279. Construire un quadrilatère, connaissant ses quatre côtés et l'angle compris entre deux côtés opposés.

280. Construire un quadrilatère, connaissant les diagonales, leur angle et deux angles opposés.

281. Construire un trapèze, connaissant les diagonales, leur angle et la somme ou la différence de deux côtés successifs.

282. Construire un triangle, connaissant m_a, $\angle (m_b, m_c)$ et la surface.

283. Dans un triangle ABC, rectangle en B, mener une transversale XY de longueur donnée, de telle manière que $\overline{AX}^2 + \overline{XY}^2 + \overline{YC}^2$ soit égal à un carré donné.

Le point Y_1 (264) est déterminé par a.

284. Construire un quadrilatère inscrit, connaissant les diagonales, leur angle et l'angle d'une diagonale et d'un côté.

285. Construire un quadrilatère, connaissant les diagonales, leur angle, le rapport de deux côtés successifs et l'angle des deux autres côtés.

286. Circonscrire à un triangle donné le plus grand triangle équilatéral possible.

287. Construire un quadrilatère, connaissant deux angles opposés, sa surface et les deux lignes qui joignent les milieux des côtés opposés.

L'angle des deux lignes données se détermine au moyen de ces lignes et de la surface. On peut alors se servir de la translation générale du quadrilatère.

288. Construire un quadrilatère $ABCD$, connaissant AB, CD, $\angle BAC$, ACD et BDA.

289. Construire un quadrilatère, connaissant deux côtés opposés et tous les angles.

290. Construire un trapèze, connaissant les diagonales, leur angle et un côté.

291. Construire un quadrilatère, connaissant trois côtés et les angles adjacents au quatrième.

292. Construire un quadrilatère $ABCD$, connaissant AB, CD, AC, $\angle ABD$ et $\angle BDC$.

293. Construire un quadrilatère, connaissant $\angle BCA$, $\angle CAD$, les diagonales et leur angle.

294. On donne deux parallèles L et M, une troisième droite N et un point P; mener par P une droite qui coupe les précédentes respectivement en des points, A, B et C tels que AB et CP soient entre eux dans un rapport donné.

On transporte AB et CP dans les positions A_1Q et

QP_1, Q étant le point d'intersection de M et N, et on détermine P_1.

295. Dans un triangle $AXBYC$, mener XY suivant une direction donnée de telle manière que AX et YC aient une somme donnée.

296. Construire un trapèze, connaissant les diagonales et les côtés non parallèles (142).

297. Résoudre les problèmes 169, A étant un point quelconque.

298. Construire un quadrilatère, connaissant les diagonales, deux côtés opposés et leur angle.

299. Construire un quadrilatère, connaissant la ligne qui joint les milieux de deux côtés opposés, les diagonales, le rapport de deux côtés opposés et la somme des carrés des deux autres.

On peut construire le parallélogramme ordinaire, puisqu'on en connaît les côtés et une diagonale.

300. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et la ligne qui joint les milieux des diagonales.

Analogue au précédent ou à 261.

301. Construire un triangle, connaissant deux médianes et l'angle que la troisième fait avec le côté correspondant.

302. Construire un trapèze, connaissant les côtés parallèles et les diagonales.

303. Dans un cercle donné, inscrire un trapèze dont on donne la hauteur et la différence des côtés parallèles.

304. Construire un quadrilatère, connaissant deux côtés opposés, la ligne qui divise les deux autres côtés opposés suivant un rapport donné, l'angle que forment ces derniers et leur rapport.

Analogue à 261.

305. Construire un trapèze, connaissant les diagonales, la ligne qui joint les milieux des diagonales et la ligne qui joint les milieux de deux côtés opposés.

306. Dans un cercle, inscrire un trapèze dont on connaît la hauteur et la somme des côtés parallèles.

Le trapèze peut se placer de telle manière qu'un diamètre pris arbitrairement le divise symétriquement.

Le milieu d'un des côtés non parallèles doit donc se trouver sur une ligne connue qui est parallèle au diamètre. On peut maintenant déterminer le pied de la hauteur menée par l'extrémité d'un des côtés non parallèles (271 et 336).

307. Sur une ligne donnée AB, placer une autre ligne CD de longueur donnée de manière que C et D divisent harmoniquement AB.

Sur AB, comme corde, décrivons un cercle quelconque; et en supposant le problème résolu, menons de C et D les lignes CE et DF aux milieux des deux arcs AB. Ces lignes sont perpendiculaires entre elles et se coupent sur la circonférence du cercle. Déplaçons CD parallèlement à lui-même jusqu'en EG; FG sera vu de D sous un angle droit.

Soit M le milieu de AB, on connaît le produit et la différence de MC et MD; on peut donc aussi résoudre le problème à l'aide de ces quantités.

308. On donne deux points A et B et entre eux deux parallèles. Mener entre celles-ci une ligne MN de direction donnée telle que $AM + MN + NB$ soit un minimum.

399. Par un point donné P, mener une droite dont les distances AX et BY à deux points donnés A et B aient un produit donné.

Transportons parallèlement BY en AY_1, le lieu de Y_1 sera une droite, celui de X étant un cercle décrit sur AP comme diamètre; déplaçons parallèlement la droite d'une longueur égale au segment AB, nous avons une droite et un cercle, comme lieux géométriques pour Y.

310. D'un point donné P, on mène une ligne PA au point A d'une courbe donnée; et d'un autre point donné L, on mène la ligne LB parallèle à PA et telle que $LB : PA = m : n$. Quel sera le lieu géométrique de B?

B. Retournement.

On se sert de cette méthode, comme de la précédente, pour donner aux différents éléments une position commode pour effectuer la construction. Elle consiste à amener une partie de la ligne dans une nouvelle position, en cherchant par là :

1) A réunir ensemble les éléments donnés.

311. Dans un cercle donné, inscrire un quadrilatère $ABCD$, connaissant la grandeur des deux côtés opposés AB et CD et le rapport des deux côtés.

Retournons le triangle ABC de telle sorte que A vienne en C et C en A; B devra encore être sur la circonférence. On arrive de cette manière à placer les éléments donnés d'une manière plus commode, puisqu'on connaît ainsi deux côtés successifs et le rapport des deux autres; on peut alors tracer les deux côtés donnés et déterminer le quatrième sommet (229).

Il n'y aura plus ensuite qu'à ramener le triangle ABC dans sa position primitive.

312. Construire un quadrilatère circonscriptible, connaissant AD, AB, $\angle D$ et $\angle B$.

Retournons ADC autour de la ligne qui bissecte $\angle A$; D et C viendront en D_1 et C_1 et $D_1 C_1$ continuera à être une tangente. Nous pouvons maintenant construire le triangle dont un côté est BD_1, parce que nous connaissons ce côté et les deux angles adjacents; le cercle se détermine facilement alors, puisqu'il est tangent aux trois côtés de ce triangle.

2) A introduire dans la figure les éléments donnés.

313. Construire un triangle, connaissant a, b et $A - B$.

Retournons le triangle de manière que A vienne en B et B en A. Nous pouvons maintenant construire le triangle dont les côtés sont a et b, et l'angle compris $A - B$.

314. Construire un triangle, connaissant a, h_a et $B - C$.

On introduit $B - C$ en retournant le triangle de manière que B vienne en C, C en B, et A en A_1. On peut maintenant construire le parallélogramme qui a pour diagonale AA_1 et pour troisième sommet B, puisque la diagonale menée par B est vue de A sous un angle connu.

315. Construire un triangle connaissant bc, m_a' et $B - C$.

Si l'on retourne le triangle pour le mettre dans la position BA_1C, la surface connue de A_1BA sera égale à la surface du triangle isocèle qui a m_a pour côtés.

3) A superposer des lignes ou des angles de même grandeur. Ce procédé s'employe très souvent quand les éléments de même grandeur sont inconnus et la méthode sert, dans une certaine mesure, à les éliminer. On peut employer une méthode analogue quand on connaît le rapport de deux lignes; pour les superposer on fait croître une partie de la figure suivant le rapport donné pendant qu'on opère en même temps le retournement.

316. Construire un quadrilatère inscriptible $ABCD$, connaissant les quatre côtés.

On multiplie les côtés du triangle ABC par $AD : AB$ et on le retourne dans la position ADC_1, où DC_1 et CD forment alors une ligne droite. On peut maintenant construire le triangle CAC_1; car on connaît le rapport $CA : C_1A$ de même que CD, DC_1 et DA.

317. Dans un cercle, inscrire un triangle connaissant les milieux des arcs que soustendent les côtés.

Soient ABC le triangle cherché, γ le milieu de AB, β celui de AC et α celui de BC. Faisons tourner A autour du diamètre passant par γ, puis de ceux passant par α et β; ce point viendra de nouveau retomber en A; tandis qu'un point quelconque de la circonférence, qui est à une distance déterminée de A, se retrouvera, après une opération semblable, à la même distance de A mais du côté opposé. On pourra donc déterminer A en partant d'un point quelconque, puisqu'il se trouvera au milieu de la position de ce point et de celle qu'il vient occuper après les trois retournements. Le problème peut s'étendre à un polygone à n sommets; mais on voit aisément qu'il est indéterminé ou impossible quand n est pair, tandis qu'il est déterminé quand n est impair.

318. On donne une droite et un point A sur cette droite; mener par le centre O d'un cercle donné une droite qui coupe la circonférence en Y et la droite donnée en X de telle manière que XY et XA soient dans un rapport donné.

On amène XY (en le multipliant) en superposition sur XA; O vient en un point connu O_1 et AY est la parallèle à OO_1.

319. Construire un quadrilatère, connaissant AB, AD, $\angle B$, $\angle D$ et le rapport $BC : CD$.

On emploie le même retournement qu'au N° 316.

4) A constituer une figure symétrique de telle manière qu'un point cherché soit sur l'axe de symétrie.

320. Sur une droite donnée trouver un point qui soit à égale distance d'un point donné de cette même droite et d'une autre ligne donnée.

On élève une perpendiculaire au point donné et l'on bissecte l'angle qu'elle forme avec la droite donnée.

321. Construire un cercle qui soit tangent à une droite donnée en un point donné et coupe un cercle donné suivant un angle donné.

On déplace le cercle donné de manière qu'il coupe la droite donnée au point donné et sous l'angle donné. L'axe de symétrie des deux cercles passera par le centre du cercle cherché.

5) A amener une portion de la figure dans une position telle que deux points inconnus se confondent en un seul, tandis que deux lignes qui passent par ces points font entre elles un angle connu et contiennent chacune un point connu. On peut alors tracer un cercle qui passe par le point d'intersection des deux droites.

322. On donne deux cercles et deux points A et B sur la circonférence de l'un d'eux. Trouver sur cette même circonférence un point X tel que AX et BX rencontrent l'autre cercle respectivement aux points M et N de manière que MN ait une longueur donnée.

Soit O le centre du second cercle, l'angle MON est connu. Faisons tourner MA de cet angle autour de O, M vient en N et A en un point connu A_1. Comme MA et NB font entre elles un angle connu, l'angle BNA_1 est connu et N se trouve par là déterminé.

Exemples divers pour le retournement.

323. Dans un cercle donné inscrire un quadrilatère, connaissant deux côtés opposés et la somme des deux autres côtés.

324. Construire un triangle, connaissant A, h_a et m_a.

On retourne le triangle de manière que B vienne en C et C en B tandis que A passe du côté opposé en A_1. On peut maintenant tracer AA_1 et en déduire B.

325. Circonscrire un triangle à un cercle, de manière que les trois sommets soient sur trois lignes données issues du centre du cercle.

Le problème est analogue à 317.

326. Construire un losange de telle manière que deux de ses côtés soient sur deux parallèles données et que les deux autres passent respectivement par les points A et B.

On place le losange de manière que ses deux autres côtés soient sur les parallèles; alors AB vient dans une nouvelle position dont la direction est connue. L'angle entre celle-ci et AB détermine l'angle du losange.

327. Construire un triangle de base donnée, dont le sommet se trouve sur une ligne donnée et dont en même temps la différence des angles à la base est donnée.

On retourne le triangle, comme dans 313, et on employe la méthode de similitude.

328. Dans un triangle, on mène une ligne joignant le sommet à un point de la base. Trouver sur cette ligne un point d'où les deux segments de la base soient vus sous des angles égaux.

329. Dans un triangle ABC, AC est divisé suivant les segments AD et DC. Trouver sur AB un point X d'où l'on voie AD et DC sous des angles égaux.

On peut déterminer le point de AB qui est le symétrique de C par rapport à DX pris comme axe de symétrie.

330. Par le sommet B d'un triangle, mener une droite telle que les perpendiculaires AP et CQ abaissées sur elle déterminent deux triangles ABP et CBQ dont les surfaces aient un rapport donné.

On amène ABP dans la position CBP_1, en faisant en même temps varier sa grandeur, et sur BC comme diamètre on décrit un cercle. La corde P_1Q a alors une longueur déterminée et est coupée par BC suivant un rapport connu ($\angle QBP_1 = \angle ABC$).

331. Construire un triangle connaissant m_a, $b^2 - c^2$ et $\angle (a, m_a)$.

332. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés, et sachant qu'il doit satisfaire à la condition qu'une diagonale bissecte un angle.

333. On donne deux cercles dont les centres sont A et B. Mener un cercle passant par A et B, qui coupe respectivement les deux premiers en X et Y (de côtés différents par rapport à AB) de manière que la somme des angles ABY et BAX soit égale à un angle donné.

On amène le triangle ABY dans la position BAY_1 de manière que $\angle XAY_1$ soit l'angle donné.

334. Construire un triangle, connaissant A, ρ et $c - b$.

En appelant O le centre du cercle inscrit, on connaît trois éléments du triangle BOC, à savoir; l'angle O, la hauteur OF et la distance du point F au milieu de BC.

335. Construire un triangle, connaissant ρ, $c - b$ et $C - B$.

On trace le même triangle que dans le problème précédent.

Rotation autour d'un axe.

Ce n'est qu'un cas particulier du retournement; cependant ce procédé sera si souvent employé qu'il mérite une mention spéciale. On cherche à en retirer les mêmes avantages que du précédent, en faisant tourner une partie de la figure autour d'une droite de manière que ses deux positions soient symétriques par rapport à cette dernière. On peut ainsi, par exemple, résoudre facilement le problème général suivant :

336. Mener une droite perpendiculairement à une droite donnée et de telle manière que deux courbes données interceptent sur elle des segments égaux.

Faisons en effet tourner l'une des courbes autour de la droite donnée comme axe, elle coupera l'autre aux points cherchés.

337. Construire un carré dont deux sommets opposés soient sur une droite donnée et les deux autres sur deux circonférences données (336).

338. Sur une droite donnée, trouver un point X tel que les droites qui le joignent à deux points A et B, situés d'un même côté de la ligne donnée, fassent avec celle-ci des angles égaux.

On fait tourner le point donné A autour de la ligne donnée jusqu'à ce qu'il soit venu en A_1. Alors BXA_1 est une ligne droite.

Remarque. Ce problème se présente souvent dans la nature parce qu'un corps élastique lancé contre un plan, un rayon de lumière qui se réfléchit sur un miroir, une onde qui vient frapper un plan, sont renvoyés en arrière de telle manière que l'angle de réflexion est égal l'angle d'incidence. On peut imaginer, par exemple, que A soit un point lumineux et que la ligne soit la coupe d'un miroir. Le problème consiste donc à trouver le chemin que suivra le rayon lumineux pour passer en B après la réflexion. Comme le chemin total qu'il parcourt est égal à la ligne BA_1 tandis que, pour tout autre point que X, ce serait une ligne brisée joignant les deux points, on voit que ce rayon effectue son trajet par la voie la plus courte.

Si le rayon passait par un autre point que X, il se réfléchirait encore comme s'il était issu de A_1; en sorte que dans des problèmes de ce genre on peut imaginer que la ligne n'existe pas, quand on remplace le point A par A_1.

339. Sur un billard, qui a la forme d'un polygone de n côtés, se trouvent deux billes M et N. Lancer M contre le côté AB, de telle manière qu'après s'être réfléchi sur BC et sur tous les autres côtés successivement, elle revienne frapper N.

On fait tourner M autour de AB jusqu'en M_1; on peut alors faire abstraction de AB, en remplaçant M et M_1. On continue de la sorte jusqu'à ce que le problème soit ramené au précédent; ainsi on détermine d'abord le point cherché sur le dernier côté et de là on passe facilement aux autres. Si l'un des points cherchés tombe sur le prolongement du côté correspondant, le problème est impossible.

340. Dans un polygone donné, inscrire un autre polygone dont le périmètre soit un minimum.

Deux côtés successifs doivent faire des angles égaux avec le côté du polygone sur lequel tombe leur point d'intersection; car s'il en était autrement pour l'un de ces points, on diminuerait le périmètre en amenant le point dans une position telle que le cas précédent se réalisât. Le problème est donc en liaison intime avec le précédent et peut se résoudre d'une manière analogue.

On peut commencer par le point cherché sur l'un des côtés; mais comme on ne sait pas où il se trouve, il faut successivement faire tourner le côté tout entier autour des autres côtés. On rassemble ainsi successivement tous les côtés de la figure cherchée sur une même ligne droite et les segments extrêmes de celle-ci sont les deux côtés qui se rencontraient sur la ligne qu'on a fait tourner tout d'abord. Comme l'un d'eux a constamment accompagné le côté en question pendant les rotations, son angle avec ce dernier n'a pas changé, et le problème se trouve alors ramené au suivant :

Entre deux lignes droites d'égale longueur, en mener une troisième qui fasse avec elles des angles égaux et détermine sur elles des segments égaux, comptés à partir d'une extrémité déterminée.

Si les angles égaux sont alternes, le problème sera évidemment indéterminé, si les lignes sont parallèles, et impossible quand il n'en sera pas ainsi. Ce cas se produit quand le nombre de côtés du polygone donné est pair; au contraire, s'il est impair, le problème sera toujours possible, à la condition de considérer comme inscrits les polygones dont les sommets tombent sur les prolongements des côtés du polygone donné.

341. Construire un polygone, connaissant, en position, les perpendiculaires élevées au milieu des côtés.

Soit A un des sommets cherchés, B un point quelconque; faisons tourner la droite AB successivement autour de toutes les perpendiculaires; A devra revenir en A tandis que B occupera une autre position B_1. Comme la ligne conserve tout le temps sa longueur, il faut que $BA = B_1A$. On peut d'après cela résoudre facilement le problème. On commence par prendre un point quelconque B et on détermine B_1, A doit alors se trouver sur la perpendiculaire au milieu de BB_1. En prenant de la même manière un autre point quelconque, on détermine A complètement. La discussion est analogue à celle de 340.

342. Construire un polygone, connaissant, en situation, les bissectrices des angles.

La solution est analogue à la précédente.

343. Mener à deux cercles donnés des tangentes qui se coupent sur une droite donnée et fassent avec elle des angles égaux.

Analogue à 338; il se ramène à 137.

344. Sur une droite donnée déterminer un point X dont les distances à deux points donnés A et B aient une somme donnée.

On introduit dans la figure la somme donnée, en prolongeant AX jusqu'en B_1, de manière que $XB_1 = XB$. X est donc le centre d'un cercle qui passe par le point B et est tangent au cercle connu dont le rayon est AB_1 et le centre A. Si l'on remarque que le cercle cherché doit en même temps passer par le point qu'on obtient en faisant tourner B autour de la ligne donnée, le problème se ramène à 238.

345. Sur une droite donnée, déterminer un point dont les distances à deux points donnés aient une différence donnée.

La solution est analogue à la précédente.

Remarque. Les deux derniers problèmes peuvent aussi s'énoncer comme il suit :

Trouver les points d'intersection d'une droite donnée et d'une conique dont on connaît les axes et les foyers. Le problème peut donc toujours se résoudre avec la règle et le compas. Si, au lieu de la droite donnée, on prend un cercle indépendant de la conique, la solution avec la règle et le compas n'est plus possible.

346. Dans un triangle ABC, AD est la bissectrice de l'angle A. Trouver sur cette droite un point M tel que la différence des angles DMC et DMB soit un maximum.

En faisant tourner AB autour de la bissectrice de l'angle, ce problème se ramène à 185.

347. Deux cercles passent respectivement par A et B. Trouver sur leur axe radical un point P tel que la ligne qui joint les deux points (Q et R) où PA et PB coupent les cercles pour la seconde fois, soit perpendiculaire à l'axe radical.

On fait tourner le cercle passant par A autour de l'axe radical; A vient en un point A_1 et Q en Q_1; on peut décrire des cercles autour des quadrilatères $QABR$

et Q_1A_1BR et il en résulte que le cercle AA_1B passe par P.

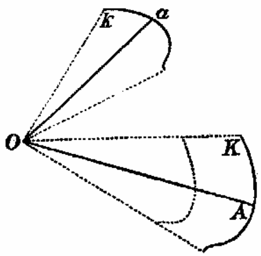
348. On donne une droite PQ et deux points A et B d'un même côté de cette droite; trouver sur elle un point X tel que $\angle BXQ = 2 \angle AXP$.

On amène, par rotation autour de PQ, AX dans la position A_1X et on détermine la projection de B sur A_1X.

TROISIÈME CHAPITRE

THÉORIE DE LA ROTATION

1. Si d'un point donné O on mène des droites aux points d'une courbe donnée k; et si l'on fait tourner ces lignes d'un angle v autour de O, tandis qu'en même temps on les fait croître suivant un rapport donné f, on obtient une nouvelle courbe K pour le lieu géométrique des extrémités des lignes qu'on a ainsi fait tourner. Elle doit être semblable à k; car on peut imaginer qu'on ait effectué les deux opérations de la manière suivante : en premier lieu, rotation de la courbe primitive, ce qui ne fait que changer sa position; puis en second lieu, multiplication par f par rapport à O. Un point a de la courbe k déterminera par rotation un point A de la courbe K. Deux pareils points sont dits homologues. Les lignes homologues sont celles qui joignent les points homologues, et les angles homologues sont formés par les lignes homologues. Le point O peut s'appeler le centre de rotation, v l'angle de rotation et f le rapport de rotation. Pour deux points homologues quelconques, A et a, le triangle AOa doit conserver la même forme puisque $\angle aOA = v$ et $\frac{AO}{aO} = f$ sont constants. On peut donc aussi dire que la courbe K est dé-



crite par le sommet A d'un triangle AOa qui, tout en conservant sa forme, tourne autour de son autre sommet O, tandis que le troisième sommet a parcourt la courbe donnée. Quand il s'agira d'exprimer qu'on fait tourner une courbe autour de O, d'un angle de rotation v et avec un rapport de rotation f on pourra dire qu'on multiplie la courbe par f_v par rapport à O.

2. Tout point du plan peut être considéré comme appartenant à l'un des systèmes et aura par suite son homologue dans l'autre. En considérant le centre de rotation à ce point de vue, il sera à lui-même son propre point homologue (point qui se correspond à lui-même) et on pourrait aussi en raison de cette propriété le nommer le point double du système. On peut également imaginer que tout le plan tourne autour de O, de telle manière qu'un de ses points parcoure une courbe donnée. Si le système tout entier des points du plan conserve sa forme pendant le mouvement, un quelconque de ses points décrira une courbe semblable à la courbe donnée.

3. Du moment qu'on connaît le centre de rotation, l'angle et le rapport de rotation, on peut faire tourner un système quelconque composé de droites et d'arcs de cercle, en employant seulement la règle et le compas. On fera tourner un point a autour de O en prenant $\measuredangle aOA$ égal à l'angle de rotation et faisant $OA = f.Oa$. Pour une droite, on n'aura qu'à faire tourner un de ses points et à mener la droite faisant avec le rayon du nouveau point un angle égal à celui que faisait la droite primitive avec le rayon allant au point qu'on a fait tourner.

Pour un cercle, il suffira de trouver les homologues de son centre et d'un point de sa circonférence.

4. Au moyen des propositions qu'on vient de développer, on peut résoudre le problème général qui suit :

Placer un triangle, semblable à un triangle donné, de telle manière qu'un de ses sommets soit en un point donné et que les deux autres se trouvent sur deux courbes données.

Prenons le point donné comme centre de rotation et faisons tourner l'une des courbes autour de lui, de manière que l'angle de rotation soit l'angle du triangle dont le sommet est en O et que le rapport de rotation soit celui des côtés adjacents à cet angle; la courbe qu'on a ainsi fait tourner coupera l'autre courbe donnée aux points où doit tomber le second sommet.

Si au lieu de la forme du triangle, on connaît l'angle dont le sommet doit tomber au point donné et le produit des côtés adjacents à cet angle, le problème se résoudra de la même manière. Seulement au lieu de faire tourner une courbe qui soit semblable à une des courbes données, ce sera l'inverse de cette courbe qu'on fera tourner.

Exemples.

349. Placer un triangle équilatéral, de manière que ses sommets soient sur trois parallèles données.

Un des sommets peut être mis en un point quelconque d'une des lignes; ce sera le centre de rotation; $v = 60^o$, $f = 1$.

350. Placer un triangle équilatéral, de manière que ses sommets soient sur trois cercles concentriques donnés.

351. Dans un parallélogramme, inscrire un triangle isocèle dont l'angle soit donné; le sommet doit être en un sommet du parallélogramme.

352. Dans un triangle donné, inscrire un autre triangle qui soit semblable à un triangle donné et qui ait un de ses sommets en un point donné d'un côté du premier.

353. Dans un segment de cercle, inscrire un triangle semblable à un triangle donné, et dont un sommet tombe en un point donné de la corde.

354. Dans un cercle donné, inscrire une corde dont la longueur soit dans des rapports donnés avec les distances de ses extrémités à un point donné.

355. Dans un parallélogramme, inscrire un rectangle dont les diagonales fassent un angle donné.

Les centres des deux parallélogrammes doivent se confondre.

356. Dans un parallélogramme, inscrire un losange dont les diagonales aient un rapport donné.

357. Dans un carré, inscrire un triangle équilatéral.

358. On donne un cercle et deux points A et B; mener au cercle une tangente telle que celle-ci et la perpendiculaire abaissée de B sur elle, soient à des distances de A qui soient dans un rapport donné.

Par une rotation autour de A, on amène B sur la tangente.

359. Dans un parallélogramme donné, inscrire un losange de surface donnée.

360. On donne deux points A et B et deux droites qui se coupent en C. Mener par A et B deux droites qui comprennent entre elles un angle donné et qui rencontrent respectivement les deux droites données en X et Y de telle manière que AX et BY soient dans un rapport donné.

Par une translation parallèle, on amène AX et BY dans les positions A_1C et B_1C.

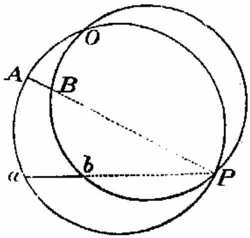
361. Construire un triangle, connaissant h_a, $B - C$ et bc.

362. Par un point donné A, mener deux cercles qui se coupent suivant un angle v; on donne le rapport de leurs rayons égal à f et chacun d'eux doit être tangent à une droite donnée.

On multiplie l'une des droites données par f, par rapport à A; le problème se trouve ramené à 181.

5. Soient données deux figures semblables; si leurs éléments se suivent dans le même sens de rotation (dans ce qui suit, nous supposerons toujours qu'il en est ainsi pour les figures semblables) elles auront toujours un centre de rotation, c.-à.-d. un point autour duquel on pourra faire tourner l'une d'elles de manière qu'elle vienne se superposer sur l'autre; le rapport de rotation est déterminé, puisque deux lignes homologues quelconques sont entre elles dans ce rapport, et l'angle de rotation est l'angle compris entre deux lignes homologues.

Pour trouver le centre de rotation, on pourrait se servir du rapport connu de ses distances à un couple de points homologues; mais on peut employer une construction plus simple.



Soient A et a, B et b deux couples de points homologues. Les lignes homologues AB et ab doivent alors comprendre entre elles l'angle de rotation; ce même angle est aussi celui que feront les droites qui joignent deux points homologues au centre de rotation; ce dernier doit donc se trouver sur le même cercle que le point d'intersection de deux lignes homologues et que deux points homologues situés sur ces lignes.

Le centre de rotation de deux lignes homologues, dans deux figures semblables, est le centre de rotation des figures elles-mêmes; car si l'on fait tourner une ligne de manière qu'elle recouvre l'autre, une des figures devra aussi recouvrir l'autre.

Le centre de rotation de deux lignes s'étendant à l'infini, considérées comme figures semblables, est entièrement indéterminé; si sur les lignes on choisit deux points comme points homologues, on a un cercle pour le lieu géométrique des centres de rotation; si l'on donne encore deux points homologues ou, ce qui revient au même, le rapport de rotation, le centre de rotation sera complètement déterminé; il n'y en a qu'un, puisque les cercles se coupent pour la seconde fois au point d'intersection des lignes.

Pour deux cercles, le centre de rotation est indéterminé, puisque deux quelconques de leurs points peuvent être regardés comme points homologues; comme les distances du centre de rotation aux centres des cercles doivent être entre elles comme les rayons, le lieu géométrique de ce centre sera un cercle qui coupe la ligne des centres harmoniquement suivant ce rapport (c'est le cercle qui passe par les centres de similitude de deux cercles donnés et a son centre sur la ligne des centres). Si l'on choisit deux points des cercles comme points homologues, le centre de rotation est déterminé et se trouve de la manière la plus simple à l'aide de deux rayons homologues, puisque les centres sont toujours des points homologues.

6. Le centre de rotation des deux côtés opposés d'un quadrilatère est aussi le centre de rotation des deux autres.

Soit O le centre de rotation de BA et CD; alors $\triangle AOB \sim \triangle DOC$; mais on en déduit facilement que $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, et il en résulte encore que O est le centre de rotation de AD et BC. Dans le premier cas B et C, A et D sont des points homologues; dans le second, ce sont B et A, et C et D.

On voit de la même manière que le centre de rotation de AB et CD est aussi celui de AC et BD.

Prolongeons les côtés opposés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent; les cercles qui déterminent le centre de rotation sont circonscrits aux quatre triangles, formés dans la figure; on doit se servir des mêmes cercles pour déterminer le centre de rotation de deux éléments quelconques de la figure qui ne se coupent pas à l'une de leurs extrémités; on a donc ainsi le théorème suivant :

Dans un quadrilatère complet, les cercles circonscrits aux triangles qu'on forme en négligeant successivement un des côtés, passent tous par le même point, et ce point est le centre de rotation de deux segments quelconques de la figure qui ne se coupent pas en l'une de leurs extrémités.

7. Si l'on divise suivant le même rapport les droites qui joignent les points homologues de courbes semblables, le lieu géométrique des points de division sera une courbe semblable aux courbes données, et deux quelconques de ces courbes ont le même centre de rotation que les premières.

Soient A et a deux points homologues et supposons la droite Aa divisée par P, suivant un rapport donné. Soit O le centre de rotation; la forme du triangle AOa doit rester constante; il doit aussi en être de même du $\triangle AOP$ et par suite P doit décrire une courbe semblable aux courbes données, quand le triangle tourne autour de O.

Coroll. Si dans un quadrilatère on mène deux systèmes de droites qui divisent les deux couples de côtés opposés en parties proportionnelles, les droites d'un même système seront elles-mêmes divisées suivant le même rapport.

Applications.

363. On donne deux droites, sur chacune d'elles un point, A et B, et en outre un point extérieur P. Mener par P une droite qui rencontre les lignes données en X et Y de telle manière que les segments AX et BY soient dans un rapport donné.

On détermine le centre de rotation O des lignes données, en considérant A et B de même que X et Y comme points homologues. Le rapport donné est ainsi le rapport de rotation. Comme alors $\triangle OXY \sim \triangle OAB$ la ligne OP sera vue de X sous un angle connu et par suite X se détermine facilement.

Remarque. Ce problème a été posé et résolu par Apollonius dans son ouvrage « de sectione rationis ». L'ouvrage lui-même a été perdu, mais Halley l'a rétabli d'après une traduction arabe.

364. Par un point donné, mener une droite qui coupe deux courbes semblables données en des points homologues.

Ce problème est une généralisation simple du précédent et se résout de la même manière.

365. On donne deux droites, sur chacune d'elles un point, A et B, et un point extérieur P. Mener par P une droite qui coupe les droites données en X et Y de telle manière que les segments AX et BY aient une somme donnée.

On porte sur une des lignes le segment BD égal à la somme donnée; alors $AX = YD$ et le problème se réduit ainsi au problème 363.

366. Par un point donné P, mener une droite qui forme, avec deux autres droites données, un triangle de surface donnée.

Soit A le point d'intersection des droites données; on représente la surface donnée sous la forme d'un triangle, dont un côté est AP et dont l'autre côté tombe sur une des droites données. La droite cherchée doit maintenant être telle que l'élément de surface qui s'ajoute au triangle soit égal à celui qui est déterminé par la section dans le triangle. Mais ces deux surfaces sont des triangles dont les hauteurs sont connues. Le rapport des bases de ces triangles est donc aussi connu et par suite le problème est ramené à 363.

Remarque. Ce problème est aussi dû à Apollonius. L'ouvrage qui en traitait, « de sectione spatii » est perdu; il a été rétabli en partie seulement par Halley.

367. On donne deux circonférences de cercle, sur l'une un point A, sur l'autre un point B. Déterminer respectivement sur les deux circonférences les points X et Y de manière que les arcs AX et BY soient semblables et que XY ait une longueur donnée.

On détermine le centre de rotation des deux cercles en regardant A et B comme points homologues; X et Y sont alors aussi des points homologues et les triangles ABO et XYO sont par suite semblables.

Ce problème renferme celui du N° 262, où le second point d'intersection des cercles est le centre de rotation.

368. Construire un rectangle dont les quatre côtés passent chacun par un point donné et dont les diagonales aient une longueur donnée.

On mène les deux cercles qui sont les lieux géométriques de deux sommets opposés du rectangle; le problème se ramène alors au précédent.

369. On donne deux lignes droites AB et CD. Tracer un cercle passant par leur point d'intersection et coupant AB en X et CD en Y de telle manière que $AX : CY$ et $XB : YD$ soient égaux à des rapports donnés.

Le cercle passe par le centre de rotation de AX et CY, et par celui de XB et YD.

370. Par deux points donnés A et B, mener deux droites, faisant entre elles un angle donné v et coupant une droite donnée et un cercle donné respectivement en X et Y de manière que $AX : BY$ soit égal à un rapport donné $1 : k$.

On multiplie la droite donnée par k_v par rapport au centre de rotation de AX et BY.

371. On donne un point A et deux droites BC et DE. Trouver sur ces lignes respectivement les points X et Y tels que BX et DY soient entre eux dans un rapport connu et que l'angle $\angle XAY$ soit égal à un angle donné.

On fait tourner BX jusqu'à ce qu'il couvre DY; A tombe en un point connu A_1 et l'angle AYA_1 est connu.

372. Placer un quadrilatère $ABCD$ de telle manière que B et C soient en des points donnés et que A et D soient sur des lignes données; on donne en même temps $B \frown C$ et le rapport $BA : CD$.

Se simplifie par un retournement (4).

373. Par un des points S d'intersection de deux cercles, mener deux droites ASa, BSb (A et B sont sur une circonférence a et b sur l'autre) qui comprennent entre elles un angle donné et qui soient telles que les triangles ASB et aSb aient même grandeur.

Le point d'intersection des cercles est le centre de rotation de Aa et Bb, comme aussi de AB et ab. Si l'on fait tourner AB jusqu'à ce qu'il couvre ab, S vient en un point connu S_1, ab a une longueur connue et ses distances à S et S_1 sont entre elles dans un rapport connu.

On a une solution plus simple en remarquant que les perpendiculaires menées par S sur les deux cordes coupent la ligne des centres à égale distance de son milieu.

374. On donne deux cercles, sur l'un d'eux un point A et sur l'autre un point B. Tracer par A et B un cercle qui coupe les deux cercles en X et Y de manière que les arcs AX et BY soient semblables.

On détermine le centre de rotation O des deux cercles, en prenant A et B comme points homologues. Comme AX et BY sont des lignes homologues, elles se coupent sur le cercle ABO; mais elles se rencontrent aussi sur l'axe radical des deux cercles donnés.

375. En joignant les milieux des côtés d'un triangle, on forme un nouveau triangle semblable au précédent; comme on le voit aisément l'angle de rotation pour ces deux triangles est 180° et le rapport de rotation $\frac{1}{2}$. Le centre de rotation doit donc diviser toute ligne, joignant deux points homologues, en deux segments qui sont entre eux dans ce rapport; et comme les médianes sont des lignes remplissant ces conditions, le centre de rotation doit être à leur point d'intersection. Comme les points d'intersection des hauteurs sont des points homologues et comme ce point, dans le petit triangle, est le centre du cercle circonscrit au grand triangle, on voit que dans tout triangle le point de rencontre des hauteurs, celui des médianes et le centre du cercle circonscrit sont sur une même droite, dont les segments sont dans le rapport de 1 à 2.

376. On donne un cercle, les points O et P et un angle v. Une droite menée par P coupe le cercle en A et B. Déterminer le lieu géométrique d'un point X tel que $\angle OBX = \angle OAX = v$.

Le cercle $AOXB$ coupe OP en deux points fixes. Il se meut donc autour de O comme centre de rotation, de telle manière que son centre parcoure une droite. X décrit donc aussi une droite. Si O est le centre du cercle donné et $v = 90°$, X décrit la polaire de P.

8. Si l'on a trois systèmes semblables A, B et C et si un point O est le centre de rotation de A et B et en même temps celui de B et C, il doit être aussi le centre de rotation de A et C. Ce point est donc le centre commun de rotation des trois systèmes; et il peut naturellement en être de même pour un nombre quelconque de systèmes.

Si l'on joint trois points homologues a, b et c des trois systèmes au centre de rotation O, les rapports de ces lignes et les angles qu'elles font entre elles sont constants; il en résulte que la forme du triangle abc est aussi constante et, pour cette raison, je l'appellerai *le triangle fondamental*. On voit de la même manière qu'à plusieurs figures semblables, ayant un centre commun de rotation, il correspond un polygone fondamental de forme constante. S'il tourne autour du centre de rotation de manière qu'un sommet décrive l'une des figures, les autres sommets décriront les autres figures et tout autre point du plan, considéré comme appartenant au polygone fondamental, tracera une figure semblable aux autres. Comme le polygone fondamental arrive à prendre successivement toutes ses positions, le centre de rotation des figures données est aussi le centre de rotation du polygone fondamental dans toutes ses positions.

9. Pour deux lignes, sur lesquelles on donnait deux points comme points homologues, le centre de rotation devait se trouver sur un cercle passant par les deux points et par le point d'intersection des deux lignes; pour trois lignes sur lesquelles on donne trois points comme points homologues, le centre de rotation est alors déterminé; c'est le point d'intersection de deux cercles du même genre; le troisième cercle doit passer par le même point. En joignant les trois points, on forme le triangle fondamental; il peut donc avoir une forme quelconque puisqu'on peut choisir arbitrairement les trois points; mais aux différents triangles fondamentaux correspondent différents centres de rotation. On peut facilement déterminer le centre de rotation pour un triangle fondamental donné en construisant sur les trois droites un triangle semblable au triangle donné (par exemple, comme au problème 154) et en déterminant de cette manière trois points homologues.

Si les trois droites passent par le même point O, ce dernier sera le centre de rotation pour chaque triangle fondamental, en sorte que les triangles semblables à un triangle fondamental donné sont semblablement placés et ont O pour centre de similitude. Il y a cependant un cas particulier où le centre de rotation est indéterminé; si en effet les sommets A et B du triangle parcourent AO et BO et si $\angle C = \angle AOB$, C parcourra une droite passant par O.

10. D'après **5**, le centre de rotation de deux cercles est indéterminé et on peut par suite trouver un centre commun de rotation pour trois cercles; comme ce point est déterminé par l'intersection de deux cercles (voir **6**), il y a deux solutions, toutes les deux également admissibles; ce sont les deux points dont les distances aux centres des cercles sont entre elles dans le rapport des rayons.

Si l'on prend l'un de ces points comme centre de rotation des cercles, on peut aisément déterminer l'angle de rotation; car les centres des cercles sont des points homologues et les lignes qui leur sont menées du centre de rotation sont des lignes homologues. Le triangle, dont les sommets sont les trois centres, est le triangle fondamental et tout autre triangle, obtenu en joignant trois points homologues, est semblable à celui-ci.

11. Si un polygone, qui reste semblable à un polygone donné, se meut de telle manière que trois de ses points décrivent des lignes droites (qui ne passent pas par le même point), tout autre point de la figure décrira aussi une ligne droite.

Le triangle, qu'on obtient en joignant les trois points, a une forme constante. En le prenant pour triangle fondamental, on peut déterminer le centre de rotation des trois lignes sur lesquelles se meuvent les points. D'après **8**, ce point est aussi le centre de rotation de toutes les positions du triangle fondamental et par suite de toutes les positions du polygone auquel le triangle appartient. Mais comme le mouvement du polygone consiste en une rotation autour d'un point fixe, tous ces points doivent décrire des courbes semblables et par suite des lignes droites.

Si les trois lignes passent par le même point, il peut y avoir un cas où le théorème n'a pas lieu, ainsi qu'on l'a fait voir dans **9**.

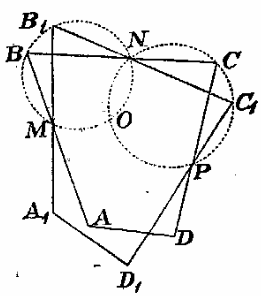
Le théorème peut facilement se généraliser; car le polygone peut se mouvoir de telle manière que trois de ses points glissent sur trois courbes semblables ayant un centre commun de rotation. Pendant le mouvement, les trois points doivent cependant coïncider constamment avec trois points homologues des courbes, et le triangle qu'ils déterminent doit donc être le triangle fondamental des courbes. S'il en est ainsi, on voit de la même manière que plus haut que tout autre point du polygone doit décrire une courbe semblable aux courbes données. Mais on voit facilement ici que les conditions en question sont plus nombreuses qu'il n'est nécessaire pour déterminer le mouvement; il faut donc d'après cela chercher à se débarrasser des conditions surabondantes, en ne considérant que le cas où les trois courbes sont des cercles; car c'est celui-là seul qui peut avoir ici une signification pour nous. Nous devrons en particulier examiner si nous aurons le même théorème que pour les lignes droites, à savoir; que le triangle fondamental peut seulement se déplacer sur les trois cercles de telle manière que ses sommets tombent toujours en trois points homologues.

On a démontré qu'à trois cercles correspondent toujours deux centres communs de rotation; le triangle fondamental doit néanmoins rester le même, quel que soit celui des points qu'on considère; car les trois centres des cercles sont dans les deux cas des points homologues et l'on obtient le triangle fondamental en joignant trois quelconques de ces points. Considérons maintenant un point A sur l'un des cercles; il aura pour homologues sur les deux autres les points B et C, si l'on employe l'un des centres de rotation, ou bien les points b et c, si l'on se sert de l'autre centre. Le triangle fondamental peut donc, quand l'un de ses sommets tombe en A, prendre les deux positions ABC et Abc et on peut aisément démontrer qu'il n'en peut prendre d'autre. En effet si l'on résout d'une manière générale le problème de placer le triangle fondamental de manière qu'il ait un sommet en A et que les deux autres soient sur les deux cercles, on n'obtient d'après la construction donnée plus haut, que deux solutions qui doivent par suite coïncider justement avec celles qu'on vient de trouver ici d'une autre manière.

Le triangle fondamental ne peut donc se déplacer sur les trois cercles, qu'avec ses sommets tombant en des points homologues; mais le mouvement peut s'effectuer de deux manières différentes.

12. Si un polygone, semblable à un polygone donné, se meut de telle manière que trois droites de la figure (ne partant pas du même point) contiennent chacune un point fixe, toute autre droite de la figure passera aussi par un point fixe.

Supposons que les trois droites AB, BC et CD passent respectivement par les points fixes M, N et P; il s'agit simplement de démontrer qu'une quatrième droite DA doit aussi passer par un point fixe. Il est d'abord évident que toutes les positions du polygone doivent avoir un centre commun de rotation. En effet si l'on cherche ce centre pour deux positions $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ du polygone, on doit, d'après **5**, construire un cercle qui passe par les points homologues B et B_1 et par le point M d'intersection des lignes homologues; ce cercle doit aussi passer par N et on peut ainsi le construire immédiatement puisqu'il passe par les deux points fixes M et N et est capable de l'angle donné B. Le centre de rotation O est donc fixe, parce qu'il doit en outre se trouver sur un autre cercle, passant par N et P, et qu'on construit d'une manière semblable. Un cercle qui passe par O, P et D, doit alors passer aussi par D_1 et par le point d'intersection des lignes homologues AD et A_1D_1, pour une position quelconque de ces dernières lignes; donc leur point d'intersection est fixe. Ce théorème se prête aussi tout naturellement à une généralisation qui peut s'établir d'une autre manière en envisageant les choses à un autre point de vue.



13. Faisons tourner, autour d'un centre fixe de rotation, un polygone semblable à un polygone donné; jusqu'ici le mouvement avait été déterminé par la condition qu'un point du polygone parcourût une courbe donnée; mais on peut aussi imaginer que ce mouvement sera réglé par la condition que, pendant le déplacement, un côté du polygone sera constamment tangent à une courbe donnée (l'enveloppera, l'engendrera). Dans ce cas, toute autre ligne du polygone devra aussi envelopper une courbe semblable à la courbe donnée. Imaginons en effet que, dans ses contacts successifs avec la courbe donnée, AB prenne les positions AB, A_1B_1, A_2B_2 &c. et qu'une autre ligne BC du polygone prenne les positions correspondantes BC, B_1C_1, B_2C_2 &c.; par une rotation autour du point fixe les deux systèmes de lignes doivent pouvoir être amenés à superposition, si l'on prend pour angle de rotation l'angle constant compris entre les lignes correspondantes et pour rapport de rotation le rapport constant des distances de deux de ces lignes au centre de rotation. Les figures que forment les deux systèmes de lignes sont donc semblables et, comme ceci est indépendant du nombre de leurs positions, la proposition subsistera encore quand ce nombre deviendra infini et quand les figures ainsi formées seront justement les courbes engendrées.

On voit aisément que le point donné est aussi le centre commun de rotation des courbes engendrées; l'angle de rotation est égal à l'angle compris entre les lignes génératrices et le rapport de rotation est égal au rapport des distances de ces lignes au centre de rotation. Prenons le polygone dans une position déterminée, tous ses côtés toucheront les courbes engendrées en des points homologues et seront aussi eux-mêmes des lignes homologues pour les courbes. Un système d'autres lignes homologues quelconques des courbes formera naturellement un polygone, semblable au polygone donné, et jouera ainsi un rôle complètement correspondant à celui du polygone fondamental; je le nomme d'après cela *polygone fondamental de seconde espèce.* Il y a une liaison intime entre les deux polygones fondamentaux; celui de première espèce peut être inscrit dans celui de seconde espèce et continuera à y rester inscrit si l'on fait tourner le polygone autour du point fixe de telle manière qu'un des sommets du polygone inscrit reste constamment sur le côté correspondant du polygone circonscrit.

Le mouvement du polygone, qu'on a considéré ici, peut aussi se déterminer d'autres manières; cependant nous n'examinerons que le cas où le déplacement est réglé par la condition que trois côtés du polygone glissent sur des courbes semblables. Pour que le mouvement puisse être le même que ci-dessus, ces trois courbes doivent avoir un centre commun de rotation et les trois côtés du polygone être constamment tangents aux courbes en des points homologues; comme ceci est suffisant pour la détermination du mouvement, celui-ci doit être le même que ci-dessus et doit consister en ce que le polygone se meut autour du centre de rotation des courbes, tandis que chacune de ses lignes engendre une courbe semblable aux courbes données; le triangle, formé des trois côtés du polygone qui glissent sur les courbes données, sera pour celles-ci le triangle fondamental de seconde espèce. Le théorème de **12** est un cas particulier de ce dernier, dans lequel les courbes sont des points.

14. Si l'on détermine le centre de rotation de deux cercles, en prenant comme homologues deux points A et a, les tangentes en ces points formeront un angle déterminé par la position de ces derniers, et qui restera invariable, si A et a parcourent des arcs semblables. Réciproquement, on peut, quand l'angle est donné, déterminer un couple de points homologues et le centre de rotation correspondant. En effet deux tangentes, comprenant entre elles l'angle donné, toucheront les cercles aux points homologues. (Deux solutions).

15. Une rotation autour d'un point donné peut toujours être remplacée par une rotation autour d'un point quelconque et une translation, le rapport de rotation et l'angle de rotation ne changeant pas, et la translation ne dépendant que de ces quantités et de la position du centre de rotation.

Comme le rapport de rotation demeure invariable, la figure acquiert par la nouvelle rotation la grandeur convenable, et comme l'angle de rotation est resté le même, les lignes de la figure tomberont dans les directions requises. La translation sera ainsi déterminée, en grandeur et direction, par la ligne qui joint les deux positions où un point quelconque de la courbe est amené par les deux rotations.

Soit donc O le centre donné de rotation, O_1 le nouveau centre. La rotation autour de O amènera le point O_1, qu'on peut considérer comme appartenant à la courbe, en un nouveau point O_2, tandis que la rotation autour de O_1 le laisse invariable. La ligne $O_1 O_2$ détermine ainsi la translation. La translation est donc déterminée par la ligne que parcourt le nouveau centre de rotation, quand on le fait tourner autour du centre donné.

Réciproquement, une translation et une rotation peuvent toujours être remplacées par une rotation autour d'un nouveau point qu'on peut déterminer facilement en procédant successivement comme ci-dessus.

16. L'ordre de succession, dans lequel s'effectuent deux rotations successives, peut être renversé, pourvu qu'on leur adjoigne une translation.

Car, quel que soit l'ordre de succession qu'on choisisse, chaque ligne tournera d'un angle égal à la somme des angles de rotation donnés et sera multipliée par le produit des rapports de rotation donnés. Les deux figures obtenues doivent donc avoir même grandeur et leurs côtés homologues même direction; une translation peut donc amener l'une à superposition sur l'autre.

Soient A et B les deux centres de rotation et considérons le centre A; pendant la rotation autour de A, il reste immobile et la rotation autour de B l'amène en un point C. Si au contraire on fait tourner d'abord autour de B, A vient en C, puis la rotation autour de A l'amène en un point D. CD ou DC est donc la grandeur de la translation qu'il faut adjoindre, quand on changera l'ordre de succession des deux rotations.

17. Deux rotations peuvent se composer en une seule.

Supposons que les rotations doivent s'effectuer autour de A et B. Dans la rotation qui doit les remplacer, il n'y a d'inconnu que le centre C de rotation. La rotation autour de A laisse ce point A immobile et celle autour de B l'amène en un point A_1. Il faut donc maintenant déterminer C par la condition que $\angle ACA_1$ soit égal à la somme des deux angles de rotation donnés, tandis que le rapport $CA_1 : CA$ sera égal au produit des rapports de rotation donnés. Les angles et rapports de rotation donnés déterminent ainsi les angles et les rapports des côtés dans le triangle dont les sommets tombent aux trois centres de rotation. Remarquons en particulier que si deux de ces points coïncident, tous les trois coïncident, comme on l'a montré ci-dessus, et que si les angles de rotation donnés sont nuls, les trois centres de rotation sont sur une même droite. Les centres de rotation sont dans ce cas les centres de similitude des figures, qui sont semblablement placés deux à deux. Plus tard, nous démontreronc ce théorème d'une autre manière.

18. On a montré comment, par la rotation et l'inversion, on arrive à des systèmes de points, où à chaque point d'un système correspond un point de l'autre système, et à chaque cercle de l'un, un cercle de l'autre (les droites sont comprises sous cette dénomination de cercle) et comment cette corrélation fait ressortir la signification des transformations employées en géométrie élémentaire. Il y a donc des raisons pour rechercher s'il n'y a pas encore d'autres transformations où un point corresponde à un point et un cercle à un cercle, quand on regarde tous les points du plan comme appartenant aux deux systèmes.

Soient S et C les deux systèmes; nous les pouvons placer de telle manière qu'un point quelconque non singulier O du système S couvre le point correspondant du système C. Maintenant nous transformons par inversion les deux systèmes par rapport à O en deux systèmes nouveaux S_1 et C_1; dans ce système point et ligne droite correspondent à point et ligne droite respectivement, car les lignes droites naissent des cercles passant par O dans les systèmes S et C. Alors, selon un théorème bien connu de la géométrie moderne, les systèmes S_1 et C_1 sont des systèmes projectifs et de plus, un cercle correspondant à un cercle, des systèmes semblables. Le système S_1 peut donc être transformé dans le système C_1 par une rotation (et au besoin un retournement autour d'un axe).

Il est donc démontré que deux systèmes dans lesquels les éléments points et cercles correspondent respectivement à des points et des cercles, peuvent toujours être transformés l'un dans l'autre par rotation, inversion et retournement.

19. Des théorèmes qu'on a démontrés dans la théorie de la rotation, on peut déduire par les méthodes de la géométrie supérieure des théorèmes nouveaux bien plus généraux. Comme ces applications sont étrangères au plan de cet ouvrage, nous nous contenterons d'en donner un exemple. Dans **11**, on a prouvé que si une ligne se meut de telle manière que le rapport des segments ab, bc que trois lignes fixes déterminent sur elle, soit constant, elle tourne autour d'un centre fixe de rotation; d'oû il résulte que tout point de cette ligne déterminé par le rapport suivant lequel il coupe un segment quelconque, par exemple ab, décrit aussi une ligne droite. Les rapports en question peuvent s'exprimer au moyen de rapports anharmoniques, si l'on a égard au point d'intersection de la ligne mobile avec la droite de l'infini. Sous la forme que prend alors le théorème, il exprime une propriété projective, la suivante :

Si une droite mobile rencontre quatre droites fixes en des points dont le rapport anharmonique est constant, tout point de la droite (déterminé au moyen de rapports anharmoniques) décrit une droite.

Si l'on fait passer deux des droites fixes par les points circulaires imaginaires à l'infini, on en déduit :

Si un angle donné ABC a son sommet A fixe et si B et C parcourent des droites fixes, tout point D de la ligne BC (déterminé par l'angle BAD) décrira une droite.

Applications.

377. Dans un triangle donné ABC, inscrire un autre triangle congruent à un triangle donné.

D'après **9**, un système de triangles semblables, inscrits dans un triangle donné, a un centre commun de rotation; d'après cela, on inscrit dans le triangle donné un triangle de la forme requise et on détermine le centre de rotation en le regardant comme triangle fondamental; on obtient ensuite le triangle cherché en faisant tourner ce triangle; et on effectue cette opération de la manière la plus simple, en multipliant le triangle fondamental tracé par rapport au centre de rotation de manière qu'il ait la grandeur requise; ensuite on le fait tourner autour de ce même point, jusqu'à ce que les sommets tombent sur les côtés du triangle donné.

378. Dans un quadrilatère donné, en inscrire un autre qui soit semblable à un quadrilatère donné.

On place un quadrilatère, semblable au quadrilatère donné, de manière que trois de ses sommets soient sur les côtés du quadrilatère donné et on détermine le centre de rotation, comme dans le problème précédent; il ne s'agit plus alors que de faire tourner le quadrilatère autour de ce point jusqu'à ce que le quatrième sommet tombe sur le quatrième côté. Pendant la rotation, ce sommet décrit une droite (**11**) qu'on peut tracer facilement. On peut en effet, en répétant la même construction, trouver un second point de cette droite, ou bien encore l'obtenir en faisant tourner un côté du quadrilatère donné autour du centre de rotation trouvé. Si l'on applique la première construction, il n'est pas nécessaire de chercher le centre de rotation.

379. Sur quatre droites données en placer une cinquième de telle manière que les trois segments déterminés sur cette dernière soient entre eux dans des rapports donnés.

Ce problème est un cas particulier du précédent, puisque la droite cherchée peut être considérée comme un quadrilatère de forme connue.

Remarque. Ces trois problèmes se trouvent dans le premier livre des « Principia mathematica philosophiæ naturalis » de Newton.

380. Dans un triangle donné, inscrire un triangle semblable à un triangle donné et dont la surface soit un minimum.

381. Construire un parallélogramme, dont les angles et le périmètre sont donnés et dont les côtés doivent passer chacun par un point donné.

Supposons que les côtés AB, BC, CD et DA passent respectivement par les points P, Q, R et S. Soit T le point d'intersection des cercles SAP et PBQ; alors T est le centre de rotation de AB et d'une ligne quelconque A_1PB_1 menée entre les deux circonférences; par suite

$$AT : AB = A_1T : A_1B_1.$$

Soit V le point d'intersection des cercles PAS et SDR; on trouve de même le rapport $AV : AD$ et on peut alors déterminer A (189).

382. Sur trois circonférences de cercle, placer un triangle congruent à celui qui a pour sommet les trois centres.

On cherche le centre de rotation commun des trois cercles; comme leurs trois centres sont des points homologues, le triangle donné est le triangle fondamental et le centre de rotation qu'on a trouvé doit aussi être le centre de ce dernier et de celui qu'on cherche. On obtient ainsi celui-ci en faisant tourner le premier jusqu'à ce qu'un de ses sommets tombe sur la circonférence. Le rapport donné de rotation est 1, mais le problème se résout de la même manière pour un autre rapport.

383. Construire un triangle congruent à un triangle donné et dont chacun des côtés passe par un point donné.

On trace facilement un triangle semblable au triangle donné et dont les côtés passent par les points donnés; on considère alors ceux-ci comme des courbes semblables et le triangle tracé comme le triangle fondamental de seconde espèce; puis on détermine le centre de rotation et on multiplie le triangle tracé de manière qu'il ait la grandeur requise. Comme le rapport de rotation pour le triangle ainsi obtenu et pour celui qu'on cherche est 1, deux côtés homologues doivent être à égale distance du centre de rotation, et une des lignes cherchées se trouve déterminée par ces conditions qu'elle est tangente à un cercle connu et qu'elle passe par un point donné.

384. Construire un quadrilatère, semblable à un quadrilatère donné, et dont les quatre côtés passent chacun par un point donné.

On trace un quadrilatère quelconque, semblable à celui qui est donné, et de telle manière que trois côtés passent par les trois points correspondants donnés, et on détermine le centre de rotation comme dans le problème précédent. Il faut maintenant faire tourner ce quadrilatère de telle sorte que le quatrième côté passe par le quatrième point; mais cela est facile, puisqu'en outre de ce point il contient un autre point fixe qu'on peut déterminer de deux manières différentes (problème analogue à 378).

385. Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle; d'un point O de la circonférence, on mène à chaque côté du triangle une ligne qui fasse avec lui un angle donné. Démontrer que les pieds de ces lignes sont sur une droite.

Si l'on choisit A, B et un point convenablement déterminé sur AB pour points homologues sur les trois côtés, O est le cettre de rotation et les trois pieds des droites sont des points homologues. Ces derniers sont sur une droite, puisque le triangle fondamental est une droite.

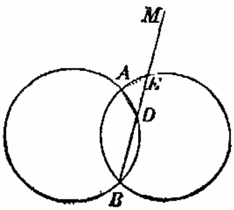
386. Les centres de trois cercles sont aux trois sommets B, C et D d'un parallélogramme. Construire un parallélogramme, dont l'angle est donné, qui ait un sommet au quatrième sommet A et les trois autres sur les trois circonférences des cercles.

Multiplions le cercle C par $\frac{1}{2}$ par rapport à A, nous avons un nouveau cercle. Ce dernier et les deux cercles

B et D ont pour triangle fondamental une droite dont les deux segments sont égaux. D'après cela, la diagonale B_1D_1 du parallélogramme cherché doit couper ces trois cercles en des points homologues et sera vue de A sous un angle donné. Faisons tourner BB_1 jusqu'à ce qu'il recouvre DD_1, A vient en un point connu A_1 et $\angle AD_1A_1$ est connu.

387. Déterminer le lieu géométrique des points tels que les tangentes menées à deux cercles donnés soient dans un rapport donné.

Supposons que les cercles se coupent en A et B et que M soit un des points cherchés. La ligne MB coupe les deux cercles en D et E; et, par suite de la condition imposée, le rapport de $MD.MB$ à $ME.MB$, ou bien de MD à ME, est constant; comme en même temps les angles du triangle ADE sont constants, la figure $ADEM$ tout entière est de forme constante et si elle tourne autour de A de telle manière que D et E décrivent des cercles, M doit aussi décrire un cercle. Comme A est le centre commun de rotation pour ce dernier et les cercles donnés, le lieu cherché doit aussi passer par A comme eux. DEM représente le triangle fondamental, et comme celui qu'on obtient en joignant les centres des trois cercles lui est semblable, on voit que ces centres doivent être sur une ligne droite. Les distances du centre cherché aux centres donnés sont entre elles comme MD est à ME et ce rapport est le carré de celui qui est donné.



388. A deux cercles donnés mener deux tangentes comprenant entre elles un angle donné et telles que la ligne qui joint les points de contact passe par un point donné.

A l'aide de **14**, ce problème se ramène à 364.

389. A deux cercles donnés mener deux tangentes compre-

nant entre elles un angle donné et telles que la ligne qui joint les points de contact ait une direction donnée.

Ce problème est un cas particulier du précédent où le point donné est à l'infini.

390. Dans un triangle, inscrire un autre triangle semblable à un triangle donné et dont un côté passe par un point donné.

On détermine trois points homologues sur les lignes données, en prenant pour triangle fondamental le triangle qui doit être inscrit.

Le problème se ramène alors à 364.

391. Dans un triangle en inscrire un autre qui soit semblable à un triangle donné et dont le centre de gravité tombe sur une des médianes du triangle donné.

On inscrit dans le triangle deux triangles quelconques, semblables à celui qui est donné; la ligne qui joint leurs centres de gravité coupe la médiane donnée au centre de gravité cherché. On peut maintenant déterminer aisément les sommets; car un système de trois sommets sur l'un des côtés du triangle donné détermine des segments qui sont entre eux comme les segments limités par les trois centres de gravité.

392. Dans un triangle inscrire un autre triangle de telle manière que deux de ses côtés aient des directions données et que le troisième ait une longueur donnée.

Soit *abc* le triangle inscrit de *bc* le côté donné. Le cercle circonscrit à *abc* coupera la ligne sur laquelle tombe *a* en deux points, à savoir en *a* et en un autre point *d*. On connaît alors tous les côtés du triangle *dbc*.

393. Construire trois cercles connaissant le point d'où on les voit sous le même angle, un point de chacune des circonférences et les rapports entre les rayons des cercles et les angles sous lesquels on voit les distances des centres du point donné.

On connaît le centre commun de rotation des cercles, leurs rapports et angles de rotation. On peut donc par rotation amener deux des points donnés sur le cercle où se trouve le troisième et l'on connaît alors trois points de ce dernier.

394. On donne deux cercles, qui se coupent en A et B, et deux autres points P et R. Mener dans chaque cercle une corde telle qu'elle passe par un des points donnés et que les deux lignes qui joignent les extrémités des cordes passent par A.

Si l'on considère les deux cordes comme des figures semblables, B est le centre de rotation pour elles et pour les cercles. On connaît le rapport et l'angle de rotation; on peut donc amener par rotation l'un des points donnés sur la corde qui passe par l'autre. On connaît alors deux points de cette dernière.

395. X est le centre de rotation de AB et CY, A, B et C étant des points donnés. Quelle courbe décrit X, quand Y parcourt une courbe donnée ?

Par une translation on amène le triangle BAX dans la position B_1CX_1. Les triangles semblables, B_1CX_1 et YCX montrent alors que B_1Y et CX_1 ont un produit constant et se meuvent dans des directions opposées avec la même vitesse angulaire, X et Y décrivent donc des courbes inverses.

396. Un arpenteur peut apercevoir trois points A, B et C du terrain; les points correspondants a, b et c sont rapportés sur la planchette. Déterminer sur la planchette le point qui correspond au point de station sur le terrain.

Le point cherché est le centre de rotation des triangles ABC et abc. Si, au moyen de l'alidade, on mène par a, b et c des lignes qui prolongées passeraient par A, B et C respectivement, ces lignes forment ce qu'on appelle le triangle d'erreur. Soit $\alpha\gamma\beta$ ce triangle, les lignes qui passent par a et b se coupant en γ, &c. A cause de la grande distance des points A, B et C les angles α, β et γ peuvent être regardés comme constants, pour de petits changements de position de la planchette. Le point cherché est donc le point d'intersection des cercles $a\gamma b$ et $a\beta c$. Cependant ces cercles ne se prêtent pas bien à la construction, parce qu'il y a toujours une certaine difficulté à les tracer et que leurs centres tombent souvent hors de la table. Prenons les figures inverses des cercles par rapport à a comme centre d'inversion et avec $a\beta . a\gamma$ comme puissance d'inversion; le point cherché se transforme dans le point d'intersection de deux droites, passant respectivement par β et γ et qui font avec $\beta\gamma$ les angles $ab\gamma$ et $ac\beta$ respectivement. La construction est donc la suivante : On construit $\angle \beta\gamma O_1 = \beta ca$ et $\angle \gamma\beta O_1 = \gamma ba$ (en tenant compte des directions suivant lesquelles les angles sont décrits) et on détermine ainsi un point O_1. Si maintenant on fait tourner la planchette jusqu'à ce que $O_1 a$ devienne la ligne de visée à A, les triangles abc, ABC seront semblablement placés et le triangle d'erreur se réduira au point cherché.

ADDITIONS

SUR L'INTERSECTION DES ARCS DE CERCLES

Ce qui précède a bien souvent fait voir combien il est important de soumettre une figure à un examen minutieux pour découvrir les relations simples qui existent entre ses éléments et notamment entre ses angles. En général, un pareil examen se fait à l'aide des théorèmes qui règlent la dépendance entre les angles et les arcs de cercle et d'autres théorèmes élémentaires du même genre. Mais si les figures sont tant soit peu compliquées, la grande quantité des angles qui y entrent rendra souvent fort difficile la détermination des relations simples. D'après cela, il sera utile de chercher à se procurer les moyens de faciliter une pareille recherche. Un pareil moyen nous est justement fourni par la considération des angles que forment les arcs de cercle, parce qu'elle rend souvent une figure bien plus facile à saisir. Je n'ai pas l'intention de traiter cette question à fond; je veux seulement donner ici quelques théorèmes qui s'y rattachent et qu'on trouvera souvent commode d'appliquer dans la pratique.

1. Dans un polygone composé d'arcs de cercle, la somme des côtés augmentée de la somme des suppléments des angles du polygone est égale à quatre angles droits.

En effet une droite peut se mouvoir en tournant autour du polygone de la manière suivante; partant d'un sommet elle restera tangente au côté adjacent jusqu'à ce qu'elle ait atteint le sommet suivant : elle tournera alors autour de ce dernier jusqu'à ce qu'elle devienne tangente au côté suivant et le mouvement se continuera ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle soit revenue dans sa position primitive. Elle aura donc décrit successivement des angles égaux, les uns aux côtés du polygone, les autres aux suppléments des angles de cette figure; et comme elle aura justement fait un tour complet, la somme de ces angles est égale à quatre angles droits.

Pour plus de simplicité, on a supposé que la ligne, après un tour complet, revient à sa position primitive; pour les polygones non convexes, elle pourra cependant faire plusieurs tours complets (ou pas du tout), en sorte que la somme des angles cherchée pourra être un multiple quelconque de quatre angles droits.

Pour que le théorème ait lieu d'une manière générale, il faut prendre les angles et les arcs avec des signes qui correspondent aux sens de rotation suivant lesquels ils sont décrits.

2. Dans un triangle, la somme des angles diminuée de la somme des côtés est égale à deux angles droits. Si les côtés passent par un même point (qui n'est pas un des sommets du triangle) la somme des angles est égale à deux angles droits et la somme des côtés est nulle.

Le dernier théorème se démontre aisément quand, au lieu des angles du triangle, on considère les angles égaux à ceux du triangle et formés au point commun d'intersection des côtés.

3. Dans un biangle*) (figure formée de deux arcs de cercle) les deux angles sont égaux entre eux et à la demi-somme des côtés.

4. Un angle inscrit est égal à la demi-somme de ses côtés et de l'arc qui le sous-tend.

*) En l'absence de tout mot français pouvant correspondre au mot danois Tokant, nous avons employé ici l'expression non usitée de biangle, qui se comprend facilement et rend d'une manière concise l'idée de l'auteur.

Prolongeons les côtés jusqu'à ce qu'ils forment un biangle; l'angle aura pour mesure la demi-somme des côtés de ce biangle. Mais la somme des deux prolongements est égale à l'arc qui sous-tend l'angle inscrit (**2**). Cet arc doit être pris avec des signes contraires, suivant qu'on le considère comme appartenant à l'un ou à l'autre des deux triangles suivant lesquels le biangle est divisé.

5. Étant donné deux couples de cercles, si les points d'intersection d'un des couples sont respectivement chacun sur un des cercles de l'autre couple et réciproquement, les deux cercles de chaque couple se coupent sous le même angle (**2**).

6. Dans un quadrilatère inscrit, la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autres. Si les quatre côtés passent par le même point, les sommes de deux angles sont chacune égales à deux droites et la somme des côtés est nulle (**4**).

7. Si dans un quadrilatère la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autres angles, le quadrilatère est inscriptible.

De (**1**) il résulte en effet que la somme de deux angles opposés diminuée de la demi-somme des côtés est égale à deux droits. Mais cette somme est justement celle des angles opposés du quadrilatère rectiligne dont les sommets coïncident avec ceux du quadrilatère donné.

8. Si deux cercles sont tangents à deux autres cercles et de la même manière, les quatre points de contact sont sur une circonférence de cercle (**7**).

9. Tout cercle passant par les points d'intersection de deux cercles fixes coupe un système de cercles tangents aux deux cercles fixes (et de la même manière) sous des angles égaux.

Ce théorème a déjà été démontré plus haut (198). Nous en donnerons ici une démonstration qui subsiste encore quand les deux cercles fixes ne se coupent pas. Par cercle passant par les points d'intersection, il faudra alors entendre un cercle tel qu'il ait avec les deux cercles fixes un axe radical commun.

Supposons qu'un cercle soit tangent aux cercles fixes, S_1 et S_2 en A et B, tandis qu'un autre cercle du système est tangent en A et B, tandis qu'un autre cercle du système est tangent en C et D. A, B, C et D sont sur une même circonférence (**8**). AC et BD se coupent en un point O qui est situé sur l'axe radical commun de S_1 et S_2 et du troisième cercle S_3. Par une inversion avec le centre O et la puissance $OC.OA$ les trois cercles ne changent pas, tandis que les deux cercles tangents se transforment l'un dans l'autre. S_3 coupera donc les deux cercles en deux points E et F qui sont les inverses l'un de l'autre. On a donc $OF.OE = OC.OA$ ce qui montre que les points A, C, F, E sont sur une même circonférence. Le théorème est maintenant une conséquence de **6**.

Des Systèmes de cercles.

Parmi les conditions qui peuvent servir à déterminer un cercle, il faut remarquer en particulier celles qui consistent en ce qu'il doit : 1° passer par un point donné; 2° être tangent à une droite donnée; 3° être tangent à un cercle donné. Si l'on choisit les trois conditions qui déterminent un cercle parmi les précédentes, on obtient un groupe de problèmes qui, à l'exception de quatre, ont été résolus dans ce qui précède. Mais, avant de nous occuper de ces quatre derniers et de quelques autres qui s'y rattachent, nous allons établir deux théorèmes qui trouveront leur application dans ce qui suit.

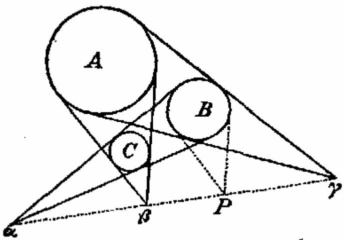
10. Si un cercle est tangent à deux autres cercles en A et B, la ligne AB passe par l'un des centres de similitude des deux cercles.

Supposons que AB rencontre une seconde fois en b le cercle passant par B. On voit alors aisément que le rayon qui va en b est parallèle au rayon mené par A dans l'autre cercle. A et b sont donc deux points homologues dans les deux cercles semblablement placés et par suite Ab passe par le centre de similitude.

Si le cercle est tangent de la même manière aux deux autres, c'est-à-dire s'il les touche tous deux intérieurement ou extérieurement, la ligne passe par le centre de similitude extérieur; si au contraire il leur est tangent d'une manière différente, cette ligne passe par le centre de similitude intérieur.

Si O est le centre de similitude, les deux cercles sont deux courbes inverses ayant O comme centre d'inversion et le produit $OA.OB$ est par suite constant.

11. Les centres de similitude extérieurs de trois cercles pris deux à deux sont sur une même ligne droite.



Soient A, B et C les cercles, γ le centre de similitude de A et B, β celui de A et C, α celui de B et C. Menons au cercle B deux tangentes parallèles aux tangentes communes à A et C et qui se coupent en P. Considérons maintenant les deux cercles A et B; β et P sont des points homologues et par suite sont en même temps sur une même ligne droite avec le centre de similitude γ. Prenons les cercles B et C; P et β sont également des points homologues et par suite sont aussi sur une même droite avec α. Il résulte de là que α, β et γ sont sur une même droite.

Coroll. 1. On voit de la même manière que les centres de similitude intérieurs de deux couples de cercles sont sur une même ligne droite avec le centre de similitude extérieur du troisième couple.

Coroll. 2. Le théorème a encore lieu pour trois courbes quelconques qui sont semblables et semblablement placées deux à deux; aux trois courbes on peut en effet adjoindre trois cercles homologues; le théorème a lieu alors pour leurs centres de similitude et ces derniers sont aussi les centres de similitude des courbes.

Exemples.

397. Tracer un cercle qui soit tangent à deux cercles donnés et de telle manière que la ligne qui joint les deux points de contact passe par un point donné.

398. Tracer un cercle qui soit tangent de la même manière à deux cercles donnés et qui intercepte une corde de longueur donnée sur une droite donnée passant par le centre de similitude extérieur des cercles.

399. On donne deux cercles A et B, et trois points D, E et F. Mener par D un cercle C tel que l'axe radical de A et C passe par E et que celui de B et C passe par F.

400. Dans un quadrilatère $ABCD$, le côté AB reste fixe et les rapports des segments des diagonales sont constants. Déterminer le lieu géométrique de CD.

Supposons que les diagonales se coupent en O et soit :

$$AO:OC = m:n \quad BO:OD = p:q.$$

Admettons que le point O, qui est arbitraire, parcoure une certaine courbe K. Multiplions-la par $\frac{m+n}{m}$ par rapport à A et par $\frac{p+q}{p}$ par rapport à B; on obtient ainsi les courbes que parcourent en même temps C et D; elles sont semblables suivant le rapport $\frac{p(m+n)}{m(p+q)}$ et leur centre de similitude est un point M situé sur la ligne AB (**11**, coroll. 2). Mais comme C et D sont des points homologues, la ligne CD passe par M, le rapport $MC:MD$ étant égal à celui qui a été trouvé plus haut. On peut voir de la même manière que le rapport $MB:MA$ est constant; en sorte que M est un point fixe et que par suite il est le lieu géométrique de CD.

401. Tracer un cercle qui soit tangent à deux cercles donnés et passe par un point donné.

On connaît la puissance du centre de similitude des cercles donnés par rapport au cercle cherché. On peut donc déterminer un autre point de ce dernier et le problème se ramène à celui du N° 238.

402. Tracer un cercle qui passe par un point donné et soit tangent à une droite et à un cercle donnés.

Ce problème n'est qu'un cas particulier du précédent; car on peut considérer la droite comme un cercle de rayon infiniment grand.

403. Tracer un cercle tangent à trois cercles donnés.

Ce problème peut facilement se ramener à 401 à l'aide de la méthode employée (page 56) à l'article de la translation parallèle.

On peut aussi le résoudre par un procédé qui ressemble entièrement à celui qu'on a appliqué dans le N° 201. Le triangle qu'il s'agit de construire est celui dont les sommets tombent aux points de contact cherchés; ses côtés passent par trois des centres de similitude des cercles donnés. Si donc on prend ces points pour centres d'inversion en choisissant les puissances d'inversion de telle manière que deux quelconques des cercles s'échangent entre eux, chacun des cercles après trois inversions viendra retomber sur lui-même. Il n'y a donc pas de différence essentielle entre le problème qui nous occupe et celui qui a été résolu précédemment.

La solution la plus simple et la plus élégante s'obtient néanmoins en ayant recours à ce théorème : que l'axe radical de deux cercles coupe suivant des angles égaux un cercle qui leur est tangent à tous deux et une des tangentes communes.

Il résulte en effet de là que les tangentes au cercle cherché aux points où il est coupé par les axes radicaux des cercles donnés sont parallèles à celles des tangentes communes aux cercles donnés qui appartiennent au même système de cercles tangents que celui qu'on considère. (Les tangentes extérieures communes de deux cercles appartiennent au système de cercles qui sont tangents de la même manière aux cercles donnés; les tangentes intérieures se rapportent au système de cercles tangents de manières différentes).

Soient A, B et C les cercles donnés. Considérons le cercle cherché et le cercle A comme semblablement placés et ayant leur point de contact comme centre de similitude; les deux axes radicaux de A et B et de A et C sont homologues aux deux lignes dont l'une joint les points de contact entre A et les tangentes communes à A et B et dont l'autre réunit les points de contact entre A et les tangentes communes de A et C. Ces deux lignes se coupent donc en un point qui est l'homologue du centre radical des cercles donnés et la ligne qui joint ces deux points passe en conséquence par le point de contact cherché.

Tous les autres problèmes où le cercle est déterminé par trois quelconques des conditions que nous avons citées plus haut peuvent être considérés comme des cas particuliers du problème que nous venons de résoudre.

404. Dans un triangle ABC inscrire trois cercles S_a, S_b et S_c tels que chacun d'eux soit tangent aux deux autres et à deux côtés du triangle.

Ce problème célèbre a été résolu pour la première fois (1807) par le géomètre italien *Malfatti*, qui calcula les rayons des cercles cherchés et trouva pour eux des valeurs qui pouvaient se construire facilement. En 1826, *Steiner* fit connaître que chacune des tangentes communes à deux des cercles est en même temps tangente à deux des cercles qu'on peut inscrire dans les trois triangles suivant lesquels le triangle donné est partagé par les bissectrices des angles. Ce théorème fournit immédiatement une construction simple du problème. Steiner n'en donna toutefois pas de démonstration, mais il déclara qu'on y arriverait au moyen d'une série de théorèmes sur les centres de similitude, les axes radicaux, les cercles radicaux, &c. qu'il énonçait en même temps. Cette démonstration a été donnée complètement pour la première fois et d'après la marche indiquée par Steiner, par Mr *Schröter*, en 1874. Ce géomètre a toutefois eu recours à des inversions tant soit peu compliquées. Nous allons établir la construction de Steiner à l'aide de théorèmes complètement élémentaires.

Nous désignerons les points de contact avec les côtés de telle sorte qu'en parcourant le périmètre du triangle on rencontre successivement les points A, c_1, c_2, B, a_1, a_2, C, b_1, b_2; S_a et S_b se toucheront en γ, S_b et S_c en α, S_c et S_c en β. Un cercle, tangent à S_a et S_c en β et qui passe par c_2, coupe AC en un point D et fait avec AB et AC des angles égaux (**9**). Ses tangentes en c_2 et D se coupent donc sur la ligne qui bissecte l'angle A et forment avec les deux côtés un quadrilatère inscriptible en sorte que l'arc c_2D est égal à l'angle A. Le cercle $c_2a\beta$ passe aussi par c_1. Soit E le point où ce cercle et le cercle βDb_2 se rencontrent. On a $\measuredangle c_1Eb_2 = \measuredangle c_1c_2\beta + \measuredangle b_2D\beta = 180^\circ - \frac{1}{2} A$. Il résulte de là que le cercle c_1Eb_2 a son centré en A. Le cercle $c_1c_2a\beta$ coupe AB, AE et la tangente en c_2 suivant des cordes égales; car $Ac_1 = AE$ et le cercle coupe AB et $D\beta c_2$ suivant des angles égaux. On peut voir de la même manière que le cercle $E\beta Db_2$ coupe AE et la tangente en D suivant des cordes égales. Soit F le point où se coupent les tangentes en c_2 et D, et G et H les points où elles rencontrent respectivement AE. De $c_2F = DF$, $c_2G = EG$, $DH = EH$ il résulte qu'un côté du triangle GFH est égal à la somme des deux autres. Les points G et H doivent donc se confondre avec F, en sorte que AEF bissecte l'angle A. Le cercle $c_1c_2a\beta$ coupe ainsi AB, AE et les tangentes en α et β sous des angles égaux et on peut par conséquent tracer un cercle concentrique qui soit tangent à ces quatre lignes. On démontrera de la même manière que ce cercle est aussi tangent à la ligne qui bissecte l'angle B et le théorème de Steiner se trouve ainsi établi. Si l'on veut aussi considérer les cercles qui sont tangents aux prolongements des côtés, on obtient d'autres solutions qui se déduisent de la précédente au moyen de changements très simples.

Si dans le problème, au lieu des côtés du triangle, on prend trois cercles, on peut alors considérer la figure inverse obtenue en prenant un des points d'intersection de deux quelconques des cercles comme centre d'inversion. On établit facilement alors que le théorème énoncé et démontré ci-dessus peut s'étendre aussi à ce cas, en remplaçant les bissectrices des angles par les cercles qui bissectent les angles des cercles donnés pris deux à deux (cercles radicaux) et en substituant à la tangente en β le cercle qui lui correspond dans la figure inverse et ainsi de suite.

Sur la possibilité de résoudre un problème donné à l'aide de la règle et du compas seulement.

Il peut arriver qu'on ne puisse pas trouver la solution d'un problème donné; et la question se pose alors de savoir si la cause ne tient pas à ce qu'on a mal compris comment il fallait attaquer le problème, ou bien si ce dernier n'appartient pas plutôt à la catégorie de ceux qu'on ne peut pas résoudre avec la règle et le compas. Ce qui suit va nous donner le moyen de trancher la question dans la majeure partie des cas.

Du moment qu'un problème peut se résoudre, la solution, quelque compliquée qu'elle puisse être, doit se composer des deux opérations suivantes : mener une ligne droite par deux points donnés et tracer un cercle dont le centre et le rayon sont donnés. Chaque point est déterminé comme intersection de deux lignes droites, ou d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles. Imaginons maintenant qu'à l'aide des formules et des méthodes de la géométrie analytique on ait calculé les coordonnées des points, au fur et à mesure qu'on les construit; dans tout le courant du calcul, on n'aura à résoudre que des équations du premier et du second degré.

On peut ainsi exprimer chacune des quantités déterminées par la construction au moyen des quantités données de telle manière que les grandeurs trouvées ne renferment aucunes autres expressions irrationnelles que de racines carrées; mais comme d'un autre côté une expression quelconque de cette espèce peut toujours se construire, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un problème puisse se résoudre avec la règle et le compas, c'est que les quantités cherchées puissent s'exprimer rationnellement au moyen des quantités données et par des racines carrées.

On trouvera une étude des équations qui peuvent se résoudre à l'aide des racines carrées dans les ouvrages de l'auteur qui ont pour titres : Om Ligninger, der kunne løses ved Kvadratrod et Theorie der Algebraischen Gleichungen. Kopenhagen. Andr. Fred. Host & Son, 1878. Chap. VII.*) L'auteur y a démontré les théorèmes suivants :

1. En dehors des coniques, il n'y a aucunes courbes dont les points d'intersection avec une droite quelconque puissent se déterminer à l'aide de la règle et du compas.

2. En dehors des coniques, il n'y a aucunes courbes auxquelles on puisse, d'un point quelconque, mener des tangentes à l'aide de la règle et du compas.

3. Toutes les fois qu'à l'aide de la règle et du compas on peut déterminer les points d'intersection d'un rayon quelconque d'un faisceau de rayons avec une courbe qui ne passe pas par le centre du faisceau, l'ordre de la courbe doit être une puissance de 2 et, dans le faisceau, il doit y avoir au moins deux rayons dont les points d'intersection avec la courbe coïncident par couples de deux.

De ces théorèmes on peut en déduire de nouveaux par transformation et étendre les recherches à d'autres systèmes de lignes que les faisceaux de rayons, à des systèmes de

*) Théorie des équations algébriques. Traduit par Mr. Laurent. 1896.

cercles, &c. Pour ce qui regarde ces généralisations, il nous suffira de renvoyer aux ouvrages cités plus haut; nous ajouterons seulement la proposition suivante :

4. Il n'y a pas d'autres courbes que le cercle et la ligne droite dont les intersections avec un cercle quelconque puissent se déterminer au moyen de la règle et du compas.

Ce théorème peut facilement se déduire par inversion du premier théorème énoncé plus haut, le cercle et la ligne droite étant les seules courbes qui, par inversion par rapport à un centre d'inversion quelconque, donnent des coniques.

Ces théorèmes sont suffisants dans un très grand nombre de cas.

Admettons, par exemple, que dans un problème on donne une ligne dont la position soit entièrement arbitraire et qu'un certain point X de la figure doive tomber sur cette ligne. En faisant abstraction de cette condition, X décrit un lieu géométrique et, d'après le premier des théorèmes que nous avons énoncés, ce lieu doit être une conique si le problème doit pouvoir se résoudre avec la règle et le compas. Le second théorème peut s'employer d'une manière semblable, quand la figure renferme un point dont la position est arbitraire.

Si l'on considère en particulier le premier cas, on voit que, des développements qui précèdent, il découle une catégorie de méthodes graphiques générales pour la résolution des problèmes. Faisons abstraction de la ligne et construisons deux figures quelconques satisfaisant aux autres conditions; nous aurons ainsi deux positions de X, par exemple X_1 et X_2. La ligne X_1X_2 coupe alors en un point la ligne laissée de côté, et ce point sera celui qu'on cherche, si le lieu de X est une ligne droite. S'il n'en est pas ainsi, faisons encore une recherche pour X, qui nous donnera X_3. Si maintenant le cercle $X_1X_2X_3$ ne coupe pas la ligne au point cherché, deux nouveaux essais nous fourniront deux autres points X_4 et X_5. Les points d'intersection de la ligne laissée de côté et de la conique qui passe par les cinq points ci-dessus peuvent se déterminer au moyen de la règle et du compas. Si ces points ne sont pas ceux qu'on cherche, le problème ne peut pas se résoudre à l'aide de la règle et du compas. On peut employer un procédé analogue dans le second cas.

Quand on a résolu un problème avec la règle et le compas, on peut à l'aide des théorèmes indiqués ci-dessus en conclure que les lieux géométriques de certains points sont des coniques. En général il ne sera pas difficile de distinguer si ces coniques sont en particulier des cercles ou des droites.

Applications.

405. Mener par un point donné une droite sur laquelle les côtés d'un angle donné déterminent un segment de longueur donnée.

Faisons abstraction d'un des côtés de l'angle, le lieu géométrique du point ainsi devenu libre sera une conchoïde. Comme la position de la ligne laissée de côté est arbitraire et indépendante de la conchoïde, le problème ne peut pas se résoudre à l'aide de la règle et du compas. Pour certaines positions du point (quand, par exemple, il est sur la bissectrice de l'angle), la ligne peut avoir une position particulière par rapport à la conchoïde qui permettra la solution du problème.

406. De deux points fixes on mène des lignes à un point quelconque d'un cercle donné; démontrer que le lieu géométrique des lignes qui joignent les deux autres points d'intersection des premières lignes et du cercle est une conique.

Le théorème résulte de ce que le problème 201 peut se résoudre à l'aide de la règle et du compas.

407. Placer un triangle donné de telle manière que chacun de ses sommets soit sur l'un de trois cercles donnés.

Le problème ne peut pas se résoudre; car en faisant abstraction d'un des cercles, le sommet devenu libre décrit un lieu géométrique qui n'est ni un cercle, ni une ligne droite. Dans le cas particulier où deux des cercles sont des lignes droites et où le triangle lui-même s'est transformé en une droite, on voit facilement en effet que le lieu géométrique est une ellipse.

408. Construire un triangle, connaissant a, c et $B - C$.

Traçons BC et menons par B deux lignes dont l'une fasse avec BC un angle égal à la moitié de l'angle donné et dont l'autre soit perpendiculaire à la seconde; le problème se ramène alors au suivant : Mener par C une droite sur laquelle les côtés d'un angle droit déterminent un segment de longueur donnée $2c$. Comme ce problème est un cas particulier de 405, nous devons l'étudier d'une manière spéciale. En faisant abstraction du point, la ligne $2c$ en glissant sur les côtés de l'angle droit enveloppe une hypocycloïde. Comme a et l'angle donné peuvent être changés de manière à faire occuper à C une position quelconque sans changer l'hypocycloïde le problème ne peut pas se résoudre avec la règle et le compas.

409. Diviser un angle en trois parties égales.

Le problème peut facilement se transformer dans le suivant : par un point donné A d'une circonférence de cercle, mener une droite qui coupe le cercle en X et un diamètre quelconque donné en Y, de telle sorte que XY soit égal au rayon. Faisons abstraction du diamètre, le lieu géométrique de Y sera une courbe du quatrième ordre, ayant pour points doubles les points circulaires imaginaires à l'infini et le point A, et qui passe en même temps par le centre du cercle. Comme les diamètres forment un faisceau de rayons dont le centre n'est pas un point remarquable de la courbe, la condition nécessaire pour que nous puissions résoudre le problème, c'est que l'ordre de la courbe soit d'une unité supérieur à une puissance de 2. (Voir les ouvrages cités plus haut). Le problème ne peut donc pas se résoudre avec la règle et le compas.

Nous venons de démontrer de cette manière que ces célèbres problèmes anciens ne peuvent pas se résoudre;

mais il n'en est pas de même pour un autre problème également célèbre, celui de la quadrature du cercle. Dans ce dernier, il s'agit de démontrer que π ne peut pas s'exprimer au moyen de racines carrées; ce théorème dans une forme plus générale a été démontré par M. Lindemann à l'aide d'une méthode due à M. Hermite.

410. On donne un point P et deux cercles. On demande de mener une ligne passant par P et une tangente à chacun des cercles de telle manière que P et les deux points de contact soient les milieux des côtés du triangle formé par les trois lignes. Le triangle doit avoir les cercles à son intérieur.

Soient X et Y les points de contact. Il faut donc maintenant placer le triangle XYP de telle manière que les hauteurs de X et Y passent par les centres des cercles. Donnons au point P une position particulière telle qu'il puisse être centre de rotation des deux cercles. Faisons tourner autour de P le cercle qui passe par X de manière qu'il vienne sur le cercle passant par Y; X vient en un point X_1 tel que PY et PX_1 font des angles égaux avec la ligne menée de P au centre du cercle. Le rayon mené suivant X_1 fait un angle connu avec PY; car avant la rotation il était perpendiculaire à PY et on l'a fait tourner d'un angle connu. Si maintenant on cherche à construire le triangle PX_1O, où O est le centre du cercle, le problème se ramène à 408 et par suite ne peut pas se résoudre avec la règle et le compas.

TABLE DES MATIÈRES

IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55
115587 PARIS (6e)

Dépôt légal, Imprimeur, n° 213.
Dépôt légal, Éditeur, n° 91.

Achevé d'imprimer le 20-8-1946.